En Variabel Analys - 5B1147 (5p)

Förl 1. Om funktioner

Beteckning $\mathbb{R} = \{$ alla reella tal $\}$

$y \in \mathbb{R}$: y är ett reellt tal

$y \notin \mathbb{R}$: y ej reellt tal

$$A \Longrightarrow B$$

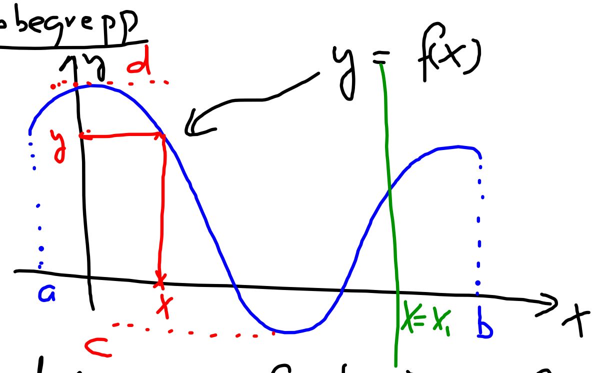
om A är sant så är B sant

Negation

icke(A) icke($\Longrightarrow$) icke(B)

$$\boxed{\text{icke } B \Longrightarrow \text{icke } A \iff A \Longrightarrow B}$$

Funktionsbegrepp



$D(f)$ = def. mgd av $f = \{x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ har en mening$\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$V(f)$ = Värdemgd för f

$= \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ x \in D(f)\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : c \leq y \leq d\}$

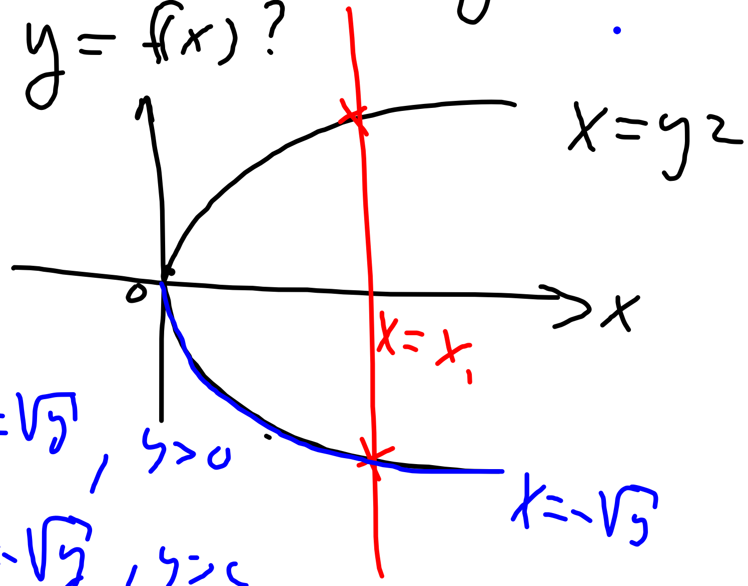
Def 1 En funktion f (inte $f(x)$) är en avbildning som till varje $x \in D(f)$ ordnar precis ett $y \in V(f)$

DVS om $\begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = f(x) \end{cases} \Longrightarrow y_1 = y_2$

Geometrisk.

Varje rät linje $x = x_1$ $a < x_1 < b$ (linje // y-axeln) skär grafen till f högst en gång

Ex 1 Kan sambandet $x = y^2$ definiera $y = f(x)$?



Lösning

svar nej

men

$$\cancel{y=f(x)} \quad x = f(y) = \begin{cases} x = \sqrt{y}, & y > 0 \\ x = -\sqrt{y}, & y > 0 \end{cases}$$

Elementära funktioner

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

${}^a\log(x)$, $\ln(x) = {}^e\log(x)$, e^x

a^x $(a>1)$, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot(x)$

x^α, $x > 0$

(kolla kursboken)

Ex: Hur man finner D(f)

Finn D(f) då $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-3}}$

Lösning

D(f): för vilka x är f definierad.

här f är definierad om $\sqrt{\underbrace{(\quad)}_{\geq 0}}$

dvs $y = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} \geq 0$

$x^2-x-6=0$ har rötterna -2 och 3

$x^2+2x-3=0$ — " — 1 och -3

$\therefore\ x^2-x-6 = (x-(-2))(x-3)$

$x^2+2x-3 = (x-1)(x-(-3))$

$y = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} = \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+3)} \geq 0$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{odef i } x = 1, -3 \\ y = 0 \text{ i } x = -2,\ 3 \end{array}}$

Gör en tabell

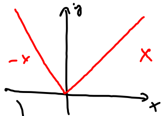
		-3		-2		1		3	
$x+3$	−	0	+		+		+		+
$x+2$	−		−	0	+		+		+
$x-1$	−		−		−	0	+		+
$x-3$	−		−		−		−	0	+
y	+	ej def	−	0	+	ej def	−	0	+

D(f): $x < -3$, $-2 \leq x < 1$

om $x \geq 3$

Om absolut belopp

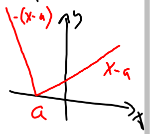
Def $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



Obs! $|x| \geq 0$ (inte < 0)

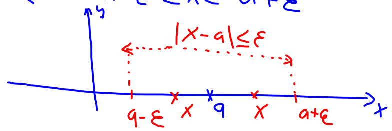
Allm $|x-a| = \begin{cases} x-a, & x \geq a \\ -(x-a), & x < a \end{cases}$

$x = a$ brytpunkt



Ex1 $|x-a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x-a \leq \varepsilon$

$\iff a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$

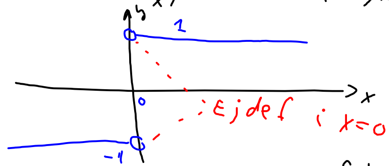


Ex2 $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

obs! $\sqrt{4} = 2$ (inte ± 2)

Ex3 Skissa $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$

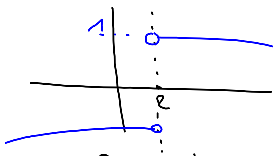
$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{-x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$f(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Ex4 $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ $x \neq 2$

$f(x) = \operatorname{sgn}(x-2) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$



Ex5 Skissa $f(x) = \big|1 - |x-1|\big| \geq 0$

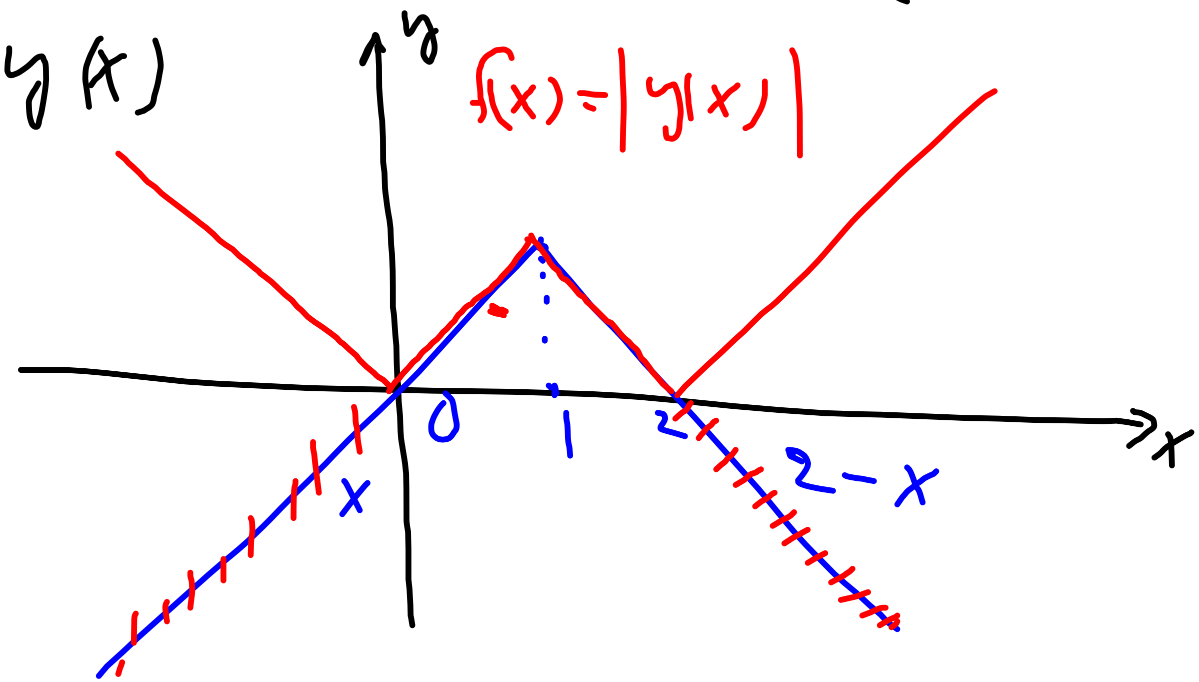
Sätt $y = 1 - |x-1|$

$f(x) = |y|$

$$y(x) = 1 - |x-1| = \left[\text{vet } |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x<1 \end{cases}\right]$$

$$= \begin{cases} 1-(x-1), & x \geq 1 \\ 1-\left(-(x-1)\right), & x<1 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, & x \geq 1 \\ x, & x<1 \end{cases}$$

Skissa $y(x)$



$f(x) = |y(x)| \geq 0$

Rötter - potenser - logaritmer

För $a>0$, $n =$ heltal positivt så har

$x^n = a$ exakt en positiv lösning

$x_n = \sqrt[n]{a}$ kallas för n:te roten av a

Man kan skriva

$$x_n = \underset{\uparrow \text{ rotform}}{\sqrt[n]{a}} = \underset{\uparrow \text{ potensform}}{a^{1/n}}$$

Potensregler $f(x) = a^x > 0$

- $a^x a^y = a^{x+y}$ (inte a^{xy})
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{(xy)}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x b^{-x}$
- $\frac{1}{b^x} = b^{-x}$ $b>0$

Lös $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$

Lösning Använd potensregler

$$3^{x+1} = 3^1 3^x = 3 \, 3^x$$

$$3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21 \Leftrightarrow 3^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^x = 21$$

$$7 \cdot 3^x = 21 \Rightarrow 3^x = \frac{21}{7} = 3$$

$$\therefore 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21 \Leftrightarrow 3^x = 3^1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Kontroll: $\underbrace{3^1 + 2 \cdot 3^{1+1}}_{=21} \stackrel{?}{=} 21$ Sant!