Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till 5B1148 Flervariabelanalys för E1, 07–03–13, kl. 14.00–19.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 14–18 poäng ger betyget 3, 19–24 poäng ger betyget 4, och 25–28 poäng ger betyget 5.
- Om du har fått 13 poäng så har du möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.

1. *Genom varje punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ i xy-planet går en nivåkurva till funktionen $f(x, y) = xy$ och en nivåkurva till funktionen $g(x, y) = x^2 - y^2$. Bestäm vinkeln $\phi(x, y)$ mellan dessa båda nivåkurvor.* (3p)

   Lösning: Vinkeln mellan nivåkurvorna är lika med vinkeln mellan kurvornas normaler, och de senare ges av $\text{grad}(f)$ respektive $\text{grad}(g)$. Så

$$\text{grad}\, f = (y, x) \quad \text{och} \quad \text{grad}\, g = (2x, -2y) \Longrightarrow$$
$$\text{grad}\, f \cdot \text{grad}\, g = 2xy - 2xy = 0 \Longrightarrow \text{vinkeln } = \pi/2.$$

2. (a) *Låt $F(x, y, z)$ vara en funktion som är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}^3$. En känd sats säger att om*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0,$$

så kan man lösa ut z som en funktion av x och y ur ekvationen $F(x, y, z) = 0$ i en öppen omgivning av (a, b, c):

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = z(x, y) \quad d\aa \quad (x, y, z) \approx (a, b, c).$$

Visa att i så fall är

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}. \qquad (2p)$$

(b) *Avgör var i* $\mathbb{R}^3$ *som man kan lösa ut* z *ur ekvationen*

$$x^2z + y^2z^2 - 4xy - z^3 = 0,$$

samt beräkna sedan $\partial z/\partial x$ *och* $\partial z/\partial y$ *i detta område.* (1p)

Lösning:

(a) Om $z = z(x, y)$ så är

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

Differentiering av $F(x, y, z) = 0$ visar att

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \frac{\partial F}{\partial z}\, dz = 0.$$

I de punkter där $\partial F/\partial z \neq 0$ fås

$$dz = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}\, dx - \frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}\, dy.$$

Jämförelse med dz ovan visar att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

(b)

$$F = x^2z + y^2z^2 - 4xy - z^3 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = x^2 + 2yz^2 - 3z^2,$$

som vi kräver ska vara $\neq 0$. I så fall är

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{-2xz + 4y}{x^2 + 2y^2z - 3z^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \frac{-2yz^2 + 4x}{x^2 + 2y^2z - 3z^2}. \end{aligned}$$

3. *Låt* $0 < a < b$. *Beräkna massan av det ihåliga klotet*

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\},$$

om densiteten ges av

$$\rho(x,y,z) = \frac{5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Uttryckt i sfäriska koordinater blir massan lika med

$$\begin{aligned}
m &= \int_{r=a}^{b} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{5}{r} \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \\
&= 5 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_a^b r \, dr \\
&= 10\pi \cdot \big[-\cos\theta \big]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^b \\
10\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(b^2-a^2) &= 10\pi(b^2-a^2).
\end{aligned}$$

4. *Kurvan γ går raka vägen från (0,0) till (1,0), därifrån raka vägen till (0,1), och till slut raka vägen från (0,1) till (0,0). Beräkna kurvintegralen*

$$I = \oint_{\gamma} (x^2+y^2)\, dx + (x+2)\, dy. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Antingen kan man beräkna I genom att parametrisera triangelns tre sidor, eller också använder man Green: om D = triangeln med hörn i (0,0), (1,0) och (0,1), så är

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) \right) dxdy \\
&= \iint_D (1-2y)\, dxdy = \int_{y=0}^{1} (1-2y) \cdot \left(\int_{x=0}^{1-y} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 (1-2y)(1-y)\, dy = \int_0^1 (1-3y+2y^2)\, dy \\
&= \left[y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6-9+4}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

5. *Vi söker rotationssymmetriska lösningar till Laplaces ekvation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \textit{då} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

det vill säga lösningar av formen

$$u(x,y) = f(r), \quad \text{där} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0.$$

(a) *Härled den ordinära differentailekvation som lösningen $f(r)$ uppfyller.* (3p)

(b) *Visa att differentialekvationen för $f(r)$ är ekvivalent med*

$$\frac{d}{dr}(r \cdot f'(r)) = 0 \quad \textit{då} \quad r \neq 0,$$

och bestäm sedan den allmänna lösningen. (1p)

Lösning: (a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \Longrightarrow \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= f'(r) \cdot \frac{x}{r} \quad \text{och} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(r) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 + f'(r) \cdot \frac{1}{r} - f'(r) \cdot \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\
&= f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3};
\end{aligned}$$

på samma sätt fås

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Tillsammans ger detta

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{x^2+y^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{y^2+x^2}{r^3} \\
&= f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}(r \cdot f'(r)) = f'(r) + r \cdot f''(r) = r \cdot (f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & r \cdot f'(r) = A \Longleftrightarrow f'(r) = \frac{A}{r} \Longleftrightarrow f(r) = A \ln r + B.
\end{aligned}$$

6. *Låt K vara den kropp i $\mathbb{R}^3$ som definieras av olikheterna*

$$\begin{cases} 0 \leq x + y \leq 2, \\ 1 \leq x + z \leq 2, \\ 1 \leq y + z \leq 2. \end{cases}$$

Beräkna integralen

$$I = \iiint_K \frac{x+y}{(x+z)(y+z)}\, dxdydz. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Här är det upplagt för att göra variabeltransformationen

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x + z, \\ w = y + z, \end{cases}$$

med funktionaldeterminanten

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Därmed blir

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = -\frac{1}{2} \quad \text{och} \quad dxdydz = \frac{1}{2}dudvdw.$$

Så

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{u=0}^{2}\int_{v=1}^{2}\int_{w=1}^{2} \frac{u}{vw}\, dudvdw \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 u\, du \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v} \cdot \int_1^2 \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 \cdot \big[\ln v\big]_1^2 \cdot \big[\ln w\big]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 = (\ln 2)^2. \end{aligned}$$

7. *Låt K vara den ändliga kropp i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av rotationsparaboloiderna*

$$z = x^2 + y^2 \quad \textit{och} \quad z = 1 - (x^2 + y^2).$$

Beräkna integralen

$$I = \iiint_K z\, dxdydz. \qquad (4p)$$

Lösning: Med $r^2 = x^2 + y^2$ gäller följande på ytornas skärningskurva:

$$z = r^2 = 1 - r^2 \Longrightarrow 2r^2 = 1 \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Uttryckt i cylinderkoordinater blir därför integralen lika med

$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^{1/\sqrt{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{z=r^2}^{1-r^2} z\, dz \right) r\, drd\phi \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} ((1-r^2)^2 - (r^2)^2) r\, dr \\ &= \pi \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2r^2) r\, dr = \pi \cdot \int_0^{1/\sqrt{2}} (r - 2r^3)\, dr \\ &= \pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

8. *En partikel som påverkas av kraften*

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy\, e^{x^2+y}, (1+y)\, e^{x^2+y} + 2y)$$

rör sig moturs längs ellipsen

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

från (0,2) till (1,0). Beräkna det arbete som kraften uträttar. (4p)

Lösning: Vi söker först en potentialfunktion U, som alltså uppfyller $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$, det vill säga

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 2xy\, e^{x^2+y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= (1+y)\, e^{x^2+y} + 2y. \end{aligned}$$

Den första ekvationen visar att

$$U = y \cdot e^{x^2+y} + g(y),$$

där $g(y)$ är en godtycklig deriverbar funktion av y. Detta ger att

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 1 \cdot e^{x^2+y} + y \cdot e^{x^2+y} + g'(y) = (1+y) \cdot e^{x^2+y} + g'(y),$$

varefter jämförelse med den andra ekvationen leder till att

$$g'(y) = 2y \iff g(y) = y^2 + C.$$

Så

$$U = y \cdot e^{x^2+y} + y^2 + C,$$

och det sökta arbetet blir lika med

$$\begin{aligned} A &= \int_{(0,2)}^{(1,0)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,2)}^{(1,0)} \operatorname{grad} U \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,2)}^{(1,0)} dU \\ &= U(1,0) - U(0,2) = C - (2e^2 + 4 + C) = -2e^2 - 4. \end{aligned}$$