Förl NR9. Tillämpning av determinanten del II.

A. Undersökning av lösningarna till vissa ekv. system

Låt A, X, B vara $(n \times n)$-matriser

Sök matris X som löser matrisekvationen

$$\boxed{AX = B} \quad (*)$$

① Om $\det(A) \neq 0 \iff A^{-1}$ finns

Vi multiplicerar $(*)$ från vänster med A^{-1} och vi får

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{I}X}_{IX} = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

$$\underbrace{IX}_{X}$$

Resultat

Om $\det(A) \neq 0 \iff A^{-1}$ finns

Så har matrisekv $AX = B$ exakt en lösning $X = A^{-1}B$

Om $\det(A) = 0$ (A^{-1} finns inte)
så har systemet $AX = B$ antigen
oändligt många (parameter) lösningar
eller $AX = B$ saknar lösning

Vad händer om $HL = B = 0$

Dvs vi studerar $AX = 0$ (Homogena ekv)

① $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ finns

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{I}X}_{X} = \underbrace{A^{-1}0}_{0} \Rightarrow X = 0$$

(Triviala lösning)

② $\det(A) = 0 \Rightarrow AX = 0$ har oändlist många lösningar

EX1 Vad är villkoret på talet a för att

$$(*)\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 3x+2y+az=2 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$$

skall har exakt en lösning

Lösning skriv om $(*)$ på matrisform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX=B$$

om $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ finns

Så har systemet $(*)$ exakt en lösning

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-)(-)}_{+} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}.$$

$$= (1)(-1)(a-1) = 1-a$$

$\det(A) = 1-a$

Svar systemet har exakt en lösning om $\det(A) = 1-a \neq 0$ dvs $a \neq 1$

EX2 För vilka värden på konstanter a, b, c är

$$(*)\begin{cases} 3x+y-z=a \\ x-y+2z=b \\ 5x+3y-4z=c \end{cases}$$

är lösbart

Lösning Bästa sättet att svara uppgiften är att lösa den givna systemet (*). Vi eliminationsmetoden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 5 & 3 & -4 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 3 & 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & -4 & c \end{array}\right) \begin{matrix} (-3) & (-5) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 0 & 4 & -7 & a-3b \\ 0 & 8 & -14 & c-5b \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & b \\ 0 & 4 & -7 & a-3b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a+b \end{array}\right)$$

Säger att $\det(A)=0$

Säger att

① om $c-2a+b \neq 0 \Rightarrow$ systemet saknar lösning.

② om $c-2a+b=0 \Rightarrow$ systemet har parameter lösning

SVAR om $c-2a+b=0$ så är den givna systemet LÖSBART.

Title: nov 17-09:43 (4 of 4)

Linjärt oberoende – beroende – bas

ATT FÖRSTÅ ett ekv. syst.

EX3 Betrakta följande ekv. syst.

$$(*)\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 & (1) \\ 3x + 2y + 3z = 2 & (2) \\ 3x + 2y + z = 3 & (3) \end{cases}$$

A. " RAD FÖRSTÅELSE "

Varje rad (ekv) (1), (2) och (3) innebär ett plan i $\mathbb{R}^3$

(*) har exakt en lösning om alla 3 plan skär varandra i en punkt

(*) har oändligt många (parameter) lösningar om alla 3 plan skär varandra längs en rät linje: $(x,y,z) = (x_0 + ta,\ y_0 + tb,\ z_0 + tc)$ skriven på parameterform

(*) saknar lösning innebär att alla 3 plan inte skär varandra.

B. "kolonn förståelse"

Vi skriver systemet (*) så här

$$x\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} + z\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$$(*) \iff x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v} \qquad (**)$$

TAL = min lösning

ATT lösa (*) innebär här att vi söker talen x, y, z så att vi kan skriva Sambandet (**) dvs

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{v}$$

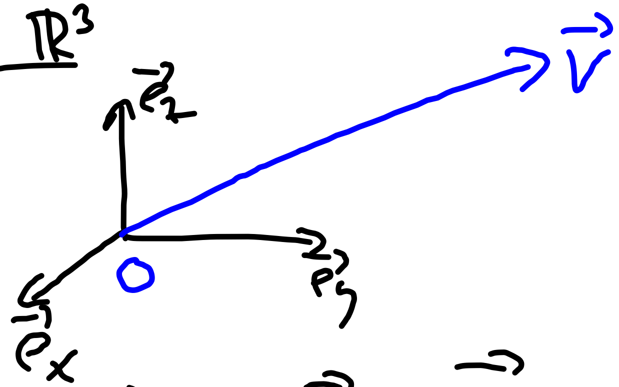
dvs: finns det talen x, y, z så vi kan skriva vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ som en <u>linjär kombination av vektor</u> $\vec{v}$

<u>Def</u> Vi säger att vektorn $\vec{v}$ kan skrivas som en <u>linjär</u> kombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ så att

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{v}$$

($\iff$ att ekv har exakt en lösning i vårt fall (x, y, z)).

BRA EX i $\mathbb{R}^3$



$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \vec{v}$$

Komponenter till vektor $\vec{v}$

Om $\vec{v} = \vec{0}$ så måste ekvationen

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \vec{0} \Longrightarrow x = y = z = 0$$

$\Longleftrightarrow \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$

Def 2 Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n$ utgör en bas i $\mathbb{R}^n$ (linjärt ober

om $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)

BRA EX4 i $\mathbb{R}^4$

Avgör om $\vec{u}_1 = (1, 0, 2, -1)^t$

$\vec{u}_2 = (2, 1, 4, 1)^t$ och $\vec{u}_3 = (3, 2, -7, 0)^t$

är linjärt oberoende?

Lösning $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^4$ (ty dessa har 4 komponenter)

Dessa är linjärt oberoende om

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0} \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

dvs undersök om

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{array} \end{array}$$

har endast den triviala lösningen

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

Vi löser systemet via eliminations metod.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \quad (1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1/13) \\ (1/3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(x_1, x_2, x_3)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(x_1, x_2, x_3)

Vi har visat att ekvationen

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0} \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$\iff \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är <u>linjärt oberoende</u> i Rummet $\mathbb{R}^4$

OBS! $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ utgör EJ en bas i $\mathbb{R}^4$. Ty för att få en bas i $\mathbb{R}^4$ KRÄVS $\boxed{\text{FYRA}}$ linjärt oberoende vektorer!

BRA EX i $\mathbb{R}^4$ linjär kombination.

undersök om $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix}$ kan skrivas

som en linjär kombination av

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$?

Lösning Vi söker x_1 och x_2 så att

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 = \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 4x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 0x_2 \\ 3x_2 \\ 8x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 & (1) \\ -x_1 + 0x_2 = 2 & (2) \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 & (3) \\ 3x_1 + 8x_2 = 18 & (4) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x_1 = -2$ sätts in i $(1) \Rightarrow x_2 = 3$

Kontrollera att $(x_1, x_2) = (-2, 3)$

satisfierar (3) och (4)

"svar" sant.

SVAR Ja! $\boxed{\vec{v} = -2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2}$