Förl n°8: TILLÄMNING AV Determinanten
del I.

Räknelagar

(1) Multiplikationssatsen

Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(AA) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2$$

$$\vdots \quad \det(A^n) = (\det(A))^n$$

EX1 $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

$$\det(AB)=\begin{vmatrix}4 & 20\\ 4 & -1\end{vmatrix}=4(-1)-4(20)=-84$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4(-1)-1(2)=-6$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}=(2)(4)-(-2)(3)=14$$

Vi får då

$$\underbrace{\det(A)\det(B)}_{\det(AB)}=-6\cdot 14=\underline{\underline{-84}}$$

② $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, A $(n \times n)$-matris

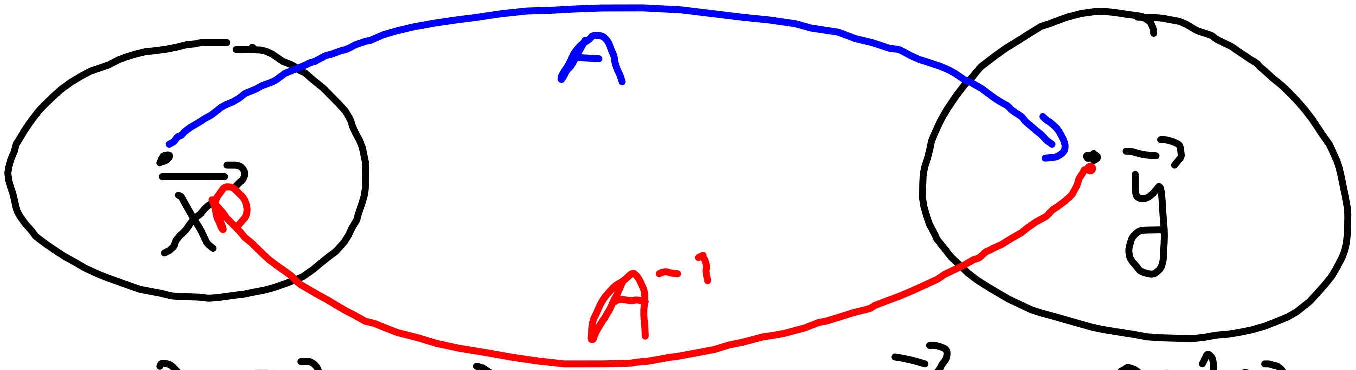
Ex. $\lambda \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 4 & \lambda 2 \\ \lambda 1 & \lambda 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} \lambda 4 & \lambda 2 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4\lambda & 2\lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \lambda \\ \leftarrow \lambda \end{matrix} = \lambda \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda \cdot \lambda \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 \det(A)$

Om inversa avbildningar

X



$$A\vec{x} = \vec{y} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

Def. Låt A och X vara $(n \times n)$-matriser om $AX = XA = I$ (enhetmatris) så sägs att matrisen X är inversen till matrisen A, och tecknas $A^{-1} = X$

Vi har följande ekv.

$$A A^{-1} = I$$

multiplikationssatsen ger att

$$\underbrace{\det(A A^{-1})}_{\det(A)\det(A^{-1})} = \underbrace{\det(I)}_{=1}$$

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

<u>SATS</u> Inversen till en $(n \times n)$-matris A finns $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

EX3 För vilka x är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$ är inverterbar?

dvs för vilka x finns inversen A^{-1}?

Lösning A^{-1} finns $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 3-x \\ 1 & -x & 1 & 3-x \\ 1 & 1 & -x & 3-x \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}.$$

$(3-x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(-1) kol 4 adderas till (-1) kol 3, kol 2 och kol 1

$$= (3-x) \begin{vmatrix} -x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-x)\underbrace{\underbrace{(-x-1)^3}_{(-(x+1))^3}}_{-(x+1)^3}(1)$$

$\det(A) = (3-x)(x+1)^3$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

SVAR A^{-1} finns om $\det(A) \neq 0$ dvs för $x \neq 3$, $x \neq -1$

EX 4. Låt A, B, C vara (3×3)-matriser med $\det(A) = 2$, $\det(B) = -1$, $\det(C) = 3$

Bestäm $\det(A^{-1} B^3 C^t)$

Lösning Här gäller att kunna multiplikationslagen för determ.

$$\det(A^{-1} B^3 C^t) = \det(A^{-1}) \det(B^3) \cdot \det(C^t)$$

Men $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

$$\det(C^t) = \det(C)$$

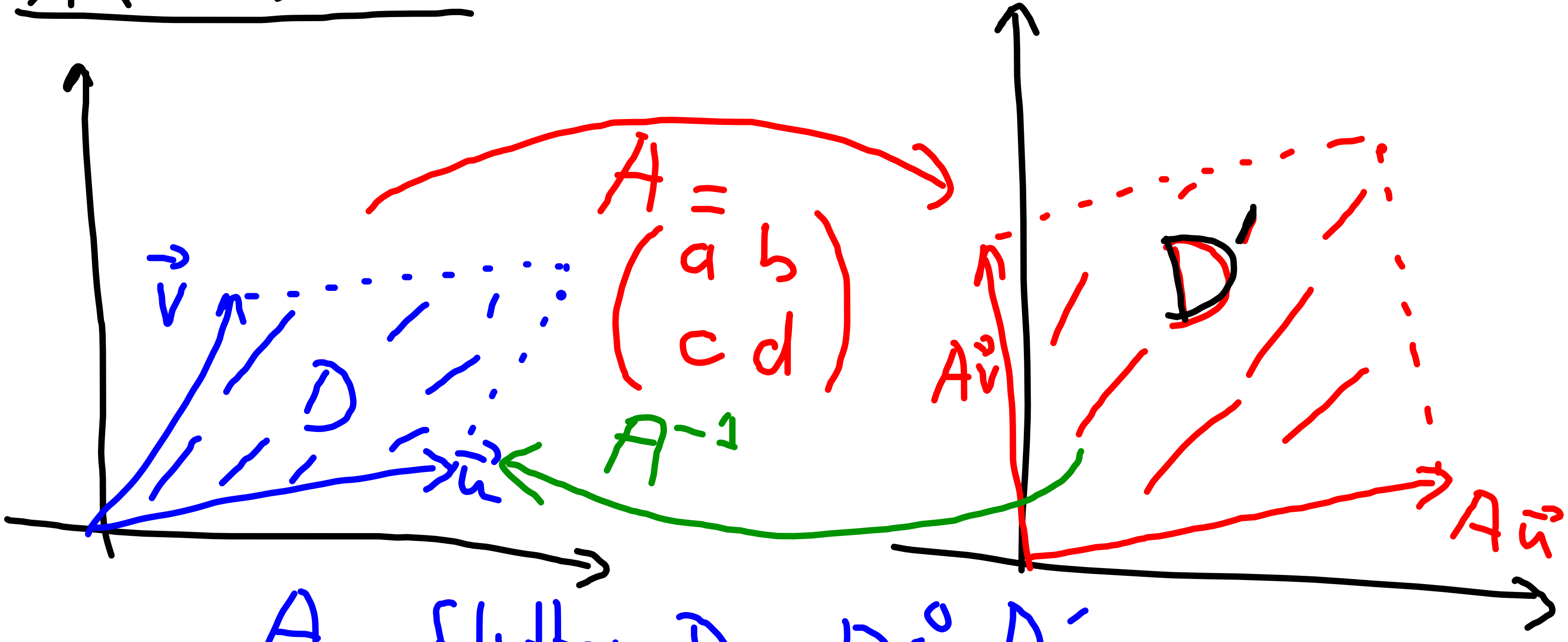
$$\det(B^3) = (\det(B))^3$$

$$\therefore \det(A^{-1} B^3 C^t) = \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{1/2} \underbrace{(\det(B))^3}_{(-1)^3} \underbrace{\det(C)}_{3}$$

SVAR $\det(A^{-1} B^3 C^t) = -3/2$

Title: nov 16-09:56 (8 of 16)

$\dfrac{\text{AREA – Volym SKALA}}{\text{AREA SKALA}}$



A flyttar D på D′

Fråga. Vilket sambandet finns mellan area(D) och area(D′)

Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\text{AREA}(D) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ (antag)}$$

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 \\ cu_1 + du_2 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}$$

VET ATT

$$\text{AREA}(D') = \det\left(A\vec{u} \;\vdots\; A\vec{v} \right)$$

matrisen $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ A\vec{u} & A\vec{v} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1+bu_2 & av_1+bv_2 \\ cu_1+du_2 & cv_1+dv_2 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ $A\vec{u}$ $\qquad$ $\uparrow$ $A\vec{v}$

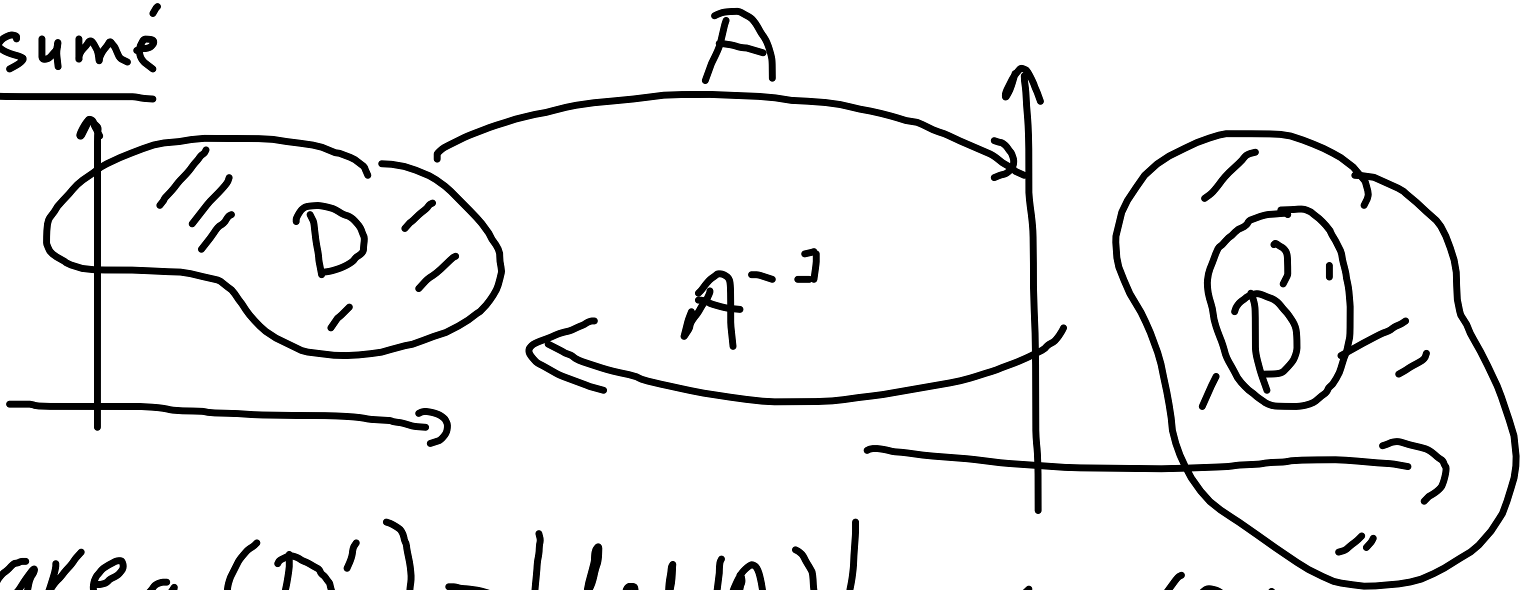
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Area}(D') = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det(A) \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}_{\text{area}(D)}$$

$$\boxed{\therefore \text{AREA}(D') = \det(A)\ \text{area}(D)}$$

Resumé

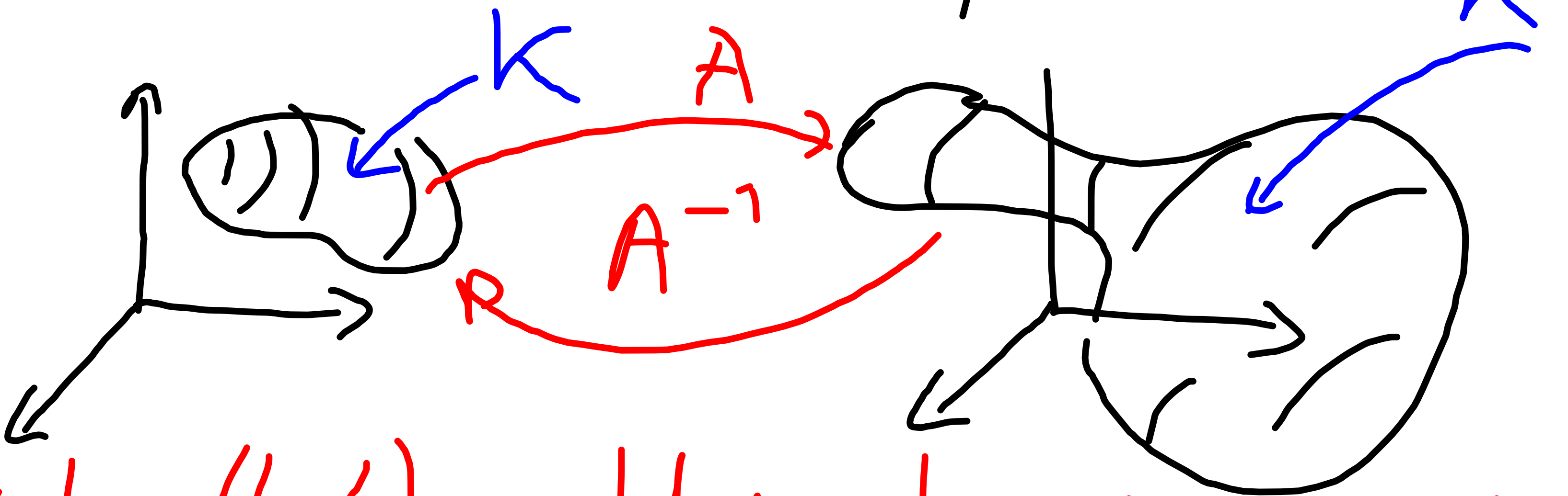


$$\underbrace{\text{area}(D')}_{>0} = |\det(A)|\ \underbrace{\text{area}(D)}_{>0}$$

$$\Longleftrightarrow \text{area}(D) = \frac{1}{|\det(A)|}\,\text{area}(D')$$

Används i dubbelintegraler

i $\mathbb{R}^3$ vi jobbar med volymer



$$\text{volym}(K') = |\det(A)|\ \text{volym}(K)$$

$$\iff \text{Volym}(K) = \frac{1}{|\det(A)|}\ \text{Volym}(K')$$

Ex Avbildning $\begin{cases} u = ax \\ v = by \end{cases}$ $\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}$, $b>a$

över för $x^2+y^2=1$ (D) på ett område (D').

a) Finn D', b) area(D')

Lösning UR avbildning $\begin{cases} u = ax \\ v = by \end{cases}$

Finn motsvarande matrisen A.

$$\begin{cases} ax = u \\ by = v \end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + 0y = u \\ 0x + by = v \end{cases}$$

$$\therefore \det(A) = ab > 0$$

b) Hur finner man bilden av enhetscirkel $x^2+y^2=1$ via avbildning (*) $\begin{cases} u = ax & a>0 \\ v = by & b>0 \quad b>a \end{cases}$

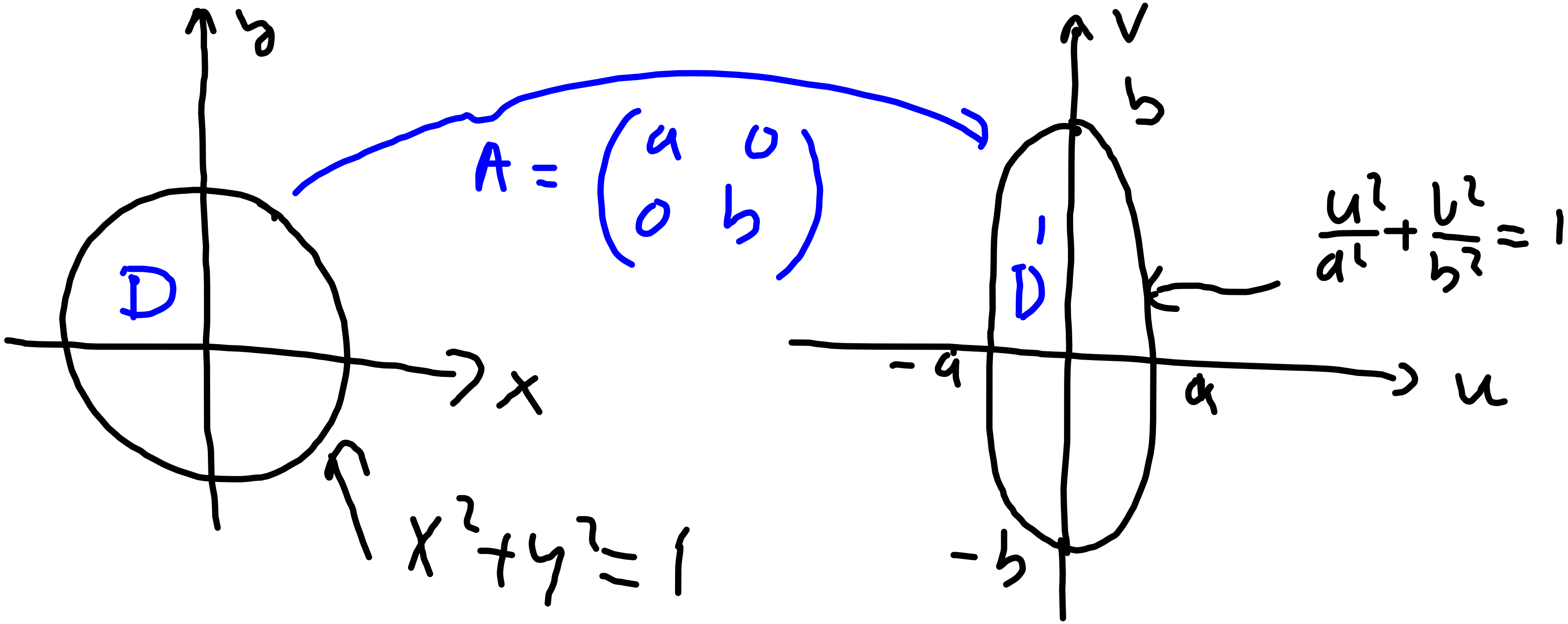
ur (*) får vi $x = \frac{u}{a}$, $y = \frac{v}{b}$

som sätts in i $x^2+y^2=1$

och får

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$



$$\operatorname{area}(D') = \underbrace{|\det(A)|}_{ab}\, \underbrace{\operatorname{area}(D)}_{\pi 1^2} = \underbrace{\pi ab}_{\text{area för ellipsen}}$$

Area för cirkel πR^2 #