Förl. 7. Om determinanten §§ 4.1–4.2

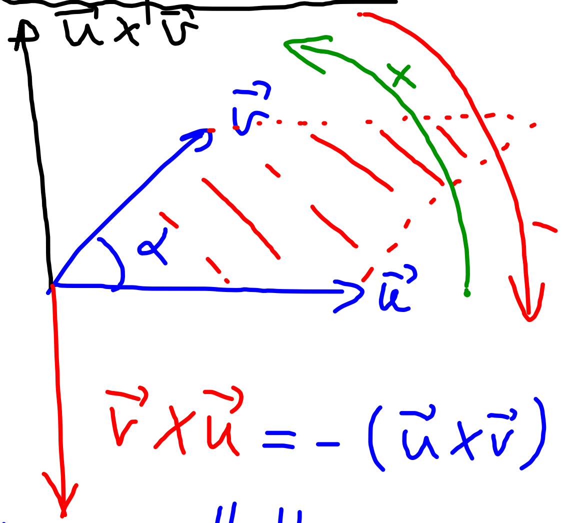
Def Till en $(n \times n)$-matris A ordnas ett **TAL** som kallas för determinanten för A och tecknas $\det(A) = TAL$

EX 1 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = TAL \gtreqless 0$$

Vad innebär det(A)

Rep Om vektorprodukten



$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

Arean av den parallellogram som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ges av $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\alpha$

Vad är det $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$?

Sätt $\vec{u} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y$, $\vec{v} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y$

där $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ är ON-bas i $\mathbb{R}^2$.

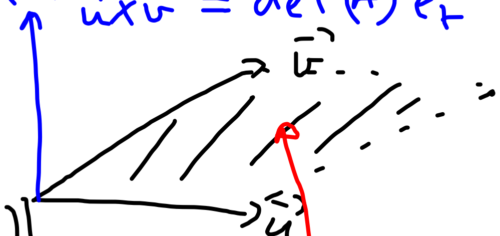
$$\vec{u}\times\vec{v} = (a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y)\times(b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y)$$

$$= a_1b_1\underbrace{\vec{e}_x\times\vec{e}_x}_{\vec{0}} + a_1b_2\underbrace{(\vec{e}_x\times\vec{e}_y)}_{\vec{e}_z} +$$

$$a_2b_1\underbrace{(\vec{e}_y\times\vec{e}_x)}_{-\vec{e}_z} + a_2b_2\underbrace{\vec{e}_y\times\vec{e}_y}_{\vec{0}}$$

$$= \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{\det(A)}\vec{e}_z = \det(A)\,\vec{e}_z$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \det(A)\,\vec{e}_z$$



$\therefore\ |\vec{u}\times\vec{v}| = |\det(A)| =$ arean

om $\det(A) > 0 \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ pos. orienterad

-"- $\det(A) < 0 \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}$ neg. orient.

om $\det(A) = 0 \Rightarrow \vec{u}\,/\!/\,\vec{v}$

Räkneregler för det(A), A : (n x n) matris

(1) $\det(A^t) = \det(A)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\det(A^t) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\therefore \det(A) = \det(A^t)$

(2) $A = \begin{pmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ övertriangel matris

$\det(A) = \begin{vmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 = \det(A^t)$

<u>EX</u> $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

#

③ Om två rader (kolonner) i A byter plats

så ändrar det(A) tecken

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

④ Om två rader (kolonner) i A är lika

$$\Longrightarrow \det(A) = 0$$

$$\det(A) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

lika

$$= (\underbrace{\vec{u} \times \vec{u}}_{= \vec{0}}) \cdot \vec{w} = 0$$

<u>eller</u>

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A) = 0$$

⑤ Om en rad (kolonn) består av nollor

$\Longrightarrow \det(A) = 0$

$$\det(A) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \underset{\vec{0}}{\vec{w}} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{0} = 0$$

Annars

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

⑥ Om alla element i en rad (kolonn) multipliceras med konstant $\lambda \neq 0$ så multiplicera också $\det(A)$ med λ

$$\det(A) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot w$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \lambda 1 & \lambda \cdot 4 & \lambda 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Title: nov 13-13:30 (5 of 10)

⑦ om en multipel av en rad (kolonn) adderas till en annan rad (kolonn) så ändras EJ det(A).

$$\det(A) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\lambda\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

ty $\underbrace{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \lambda\vec{v}}_{=0} + (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

lika

Med räkneregler ① → ⑦ kan vi överföra determinanten till en $(n \times n)$ matris på determinanten till en $(n \times n)$ övertriangelmatris

det(A) = produkten av elementen som står i huvudiagonal -en till den över-triangeln matris

Testøvning

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Finn $\det(A)$

Løsning

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-2)(-2)(-5)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-2)(-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-2)(-5)(1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$$

$$=-20$$

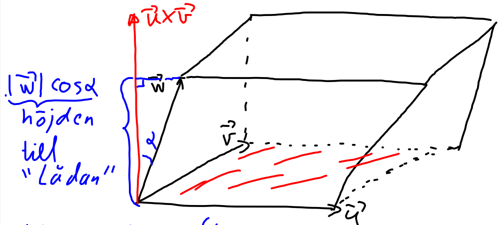
Svar: $\det(A)=-20$

Ex2 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Vad innebär $\det(A)$? i $\mathbb{R}^3$

Sätt $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$



Lådans volym = (basarean) (höjden)

$= |\vec{u}\times\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\alpha$

$= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

= Trippelprodukten

$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ bildar en bas i $\mathbb{R}^3$ (inte alla ligger i samma plan) om $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} \neq 0$

Hur ser ut $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = TAL$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1\vec{e}_x + c_2\vec{e}_y + c_3\vec{e}_z)$$

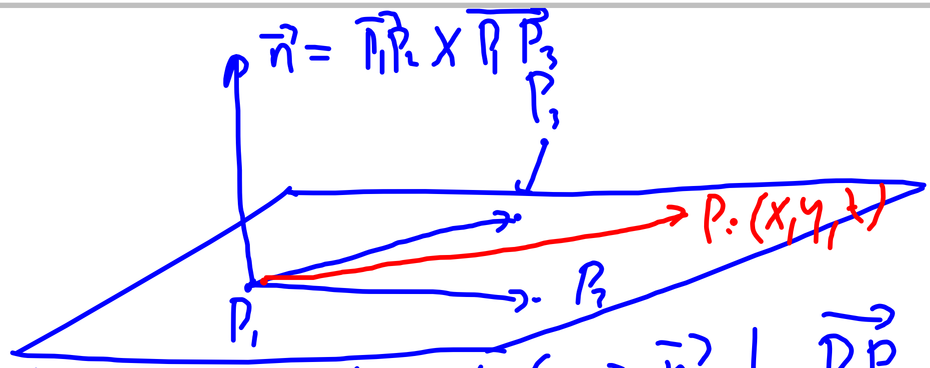
$$= [\text{Resultat}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det(A)$$

$|\det(A)|$ = Volymen av lådan.

Tillämpning av $\det(A)$

Bestäm ekvationen för det plan som innehåller tre punkter

$P_1 : (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$



P ligger i planet $\iff \vec{n} \perp \overrightarrow{P_1P}$

$\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0 \iff \left(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right) \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

EKV. För planet ser au det( ) = 0

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$