Förl 5: Ekvationssystem §3.1–2.

Ex1 Given $f(x) = e^x$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Finn $a_0, \dots a_3$ så att

$p(0) = f(0)$ $\quad$ $p'(0) = f'(0)$

$p(1) = f(1)$ $\quad$ $p'(1) = f'(1)$

Lösning $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$\begin{cases} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \\ p'(0) = f'(0) \\ p'(1) = f'(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1 & (1) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = e & (2) \\ a_1 = 1 & (3) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = e & (4) \end{cases}$$

Lätt att lösa $\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_2 = 2e - 5 \\ a_3 = 3 - e \end{cases}$

Def Ett linjärt ekv. syst. med K-obekanta

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ och r-ekvationer är av

formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 & \text{rad 1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 & \text{rad 2} \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rk}x_k = b_r & \text{rad r} \end{cases}$$

k-obekanta

Om $b_1 = b_2 = \cdots = b_r$ ($HL = 0$) så

sägs att systemet är Homogent

annars inhomogent.

Till systemet associeras

sk Koeff matrisen

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rad } 1 \\ \leftarrow \text{rad } 2 \\ \\ \leftarrow \text{rad } r \end{array}$$

Totalmatrisen T

$$T = (A \mid HL)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \bigg| & b_1 \\ \vdots & & & \bigg| & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rk} & \bigg| & b_r \end{pmatrix}}_{(k+1) \text{ kolonner}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} r\text{-rader}$$

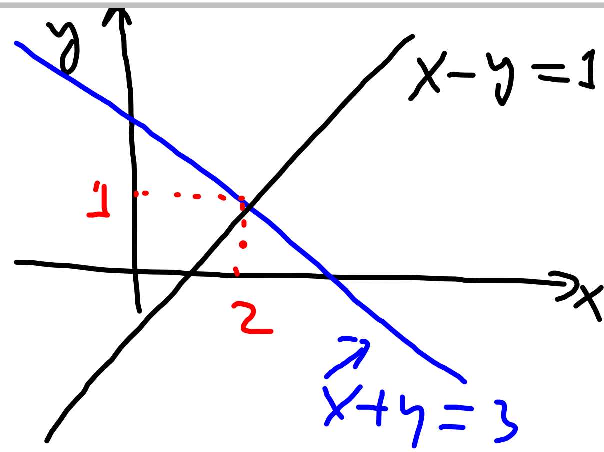
koff x_1 koeff x_k

Några geom. ex

Ex2 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

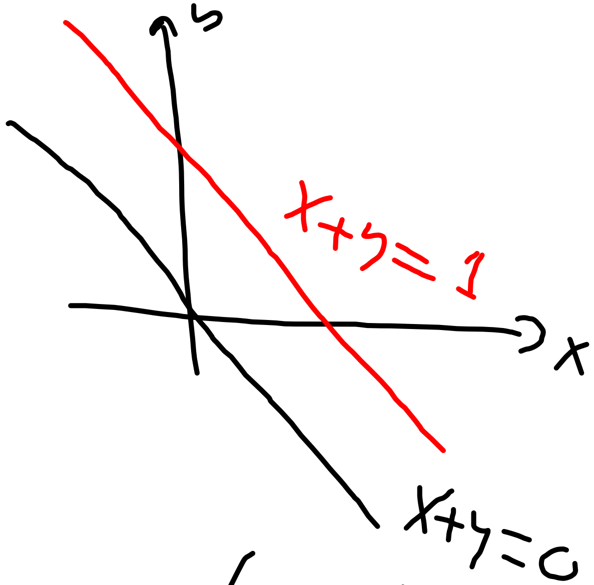
$$T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$



Ex3 $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$

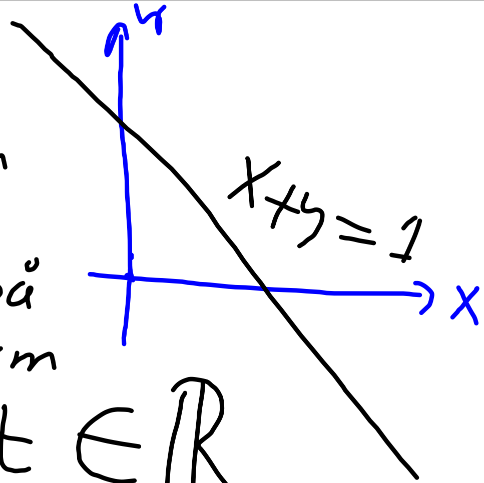
systemet saknar lösning

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

EX 4 $x+y=1$



$y=1-x$ och sedan
sätt $x=t$
vi skriver linjen på
sk parameterform

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Parameterlösning = ∞ många
lösningar = alla (x,y) som ligger
på linjen

SATS ETT godt linj eku syst
antigen sakna lösning (EX3)
har exakt en lösning (EX2)
eller har parameter lösning
= o ändligt många lösningar

Hur löser man ett ekv. syst mha av Totalmatrismetod (Gauss'metod)

EX 5

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rad 1} \\ \leftarrow \text{rad 2} \\ \leftarrow \text{rad 3} \end{array}$$

nollor; x, y, z, HL

Steg 1 (rad 1)(−1) adderas till rad 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Steg 2 (rad 1)(−3) och adderas till rad 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

TRAPPstegsmatris

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$ sista matrisen

Steg 3 ÅtersUBSTITUTION

Sista matrisen skrives som ett ekv. system

$$\begin{cases} x+y=1 & (1') \\ y+3z=0 & (2') \\ z=-1 & (3') \end{cases}$$

$\Rightarrow z=-1$ in i (2')
$y=3$ in i (1')
$x=-2$

SVAR $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Test övning: Lös systemet

$$(*)\begin{cases} 2x+5y+6z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \\ 3x+5y+4z=4 \end{cases}$$

Lösning Vi skriver $(*)$ på Totalmatris!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) \overset{-1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \overset{-2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \overset{-1}{\sim} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow x & \uparrow y & \uparrow z & \uparrow HL \end{array} \end{array}$$

Vi skriver sista matrisen som ekv.system

$$\begin{cases} x-2z=3 \\ y+2z=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2z-3=0 \quad (1) \\ y+2z+1=0 \quad (2) \end{cases}$$

Två plan som skär varandra längs en rät linjen som skall skrivas på parameterform.

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow x = 2z+3 \\ (2) \Rightarrow y = -2z-1 \end{array}\right\} \quad \text{Sätt } z = t$$

$$\Longrightarrow x = 2t+3, \; y = -2t-1$$

SVAR

$$(x,y,z) = (3+2t, -2t-1, t)$$

Simulltana system

Lös följande system samtidigt

$$(1)\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x-y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Vi har samma koeff. matris!

Vi löser (1), (2) och (3) samtidigt

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad x \qquad y \qquad z \quad}_{\text{koeff. matris } A} \qquad HL(1) \qquad HL(2) \qquad HL(3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1, -3, -2

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1, -1

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

3, 1

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right) \quad (1/4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & +3 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/4 & -7/4 \end{array}\right)$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/4 & -7/4 \end{array}\right)$$

$x \quad y \quad z \qquad H(1) \quad H(2) \quad H(4) \leftarrow$ løsn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 2 \\ -7/4 \end{pmatrix}$$