Förl n°4: Linjära avbildningar eller vad gör en matris.

1. Vad gör en matris

Ex 1. $\begin{cases} 2x + y = b_1 \\ x + 2y = b_2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

$$A\vec{u} = \vec{b}$$

A transformera $\vec{u}$ på $\vec{b}$

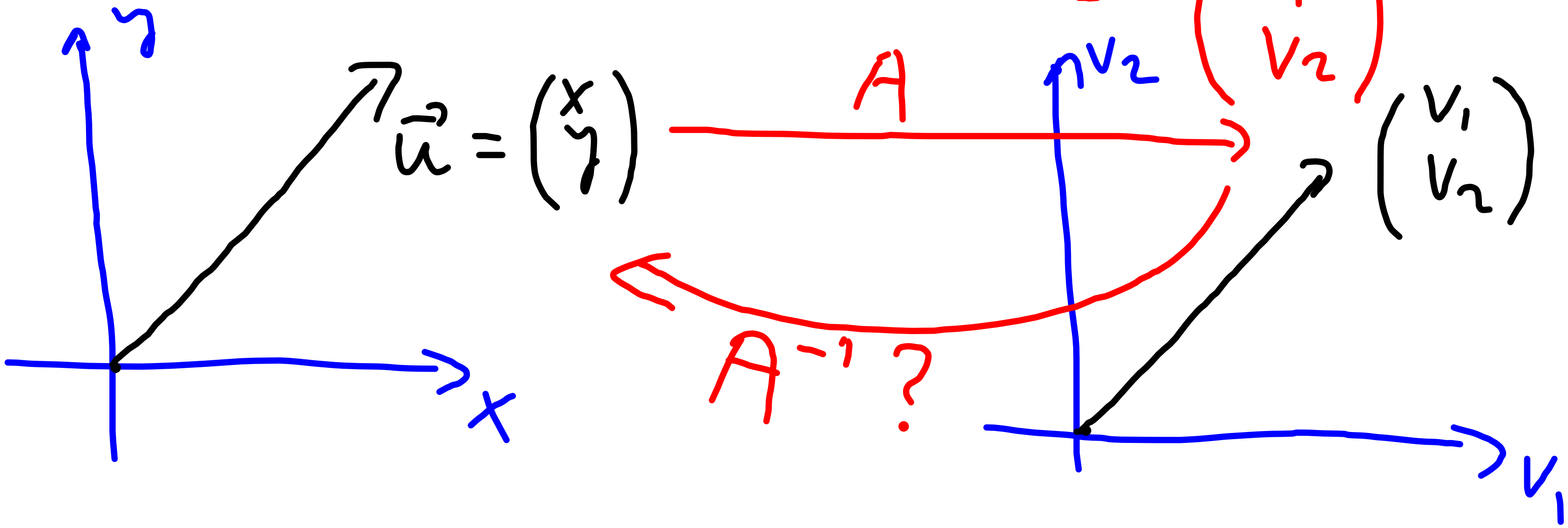
$$\vec{u} \xrightarrow{A} \vec{b}$$

Tag $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EX 2

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$



Def 1 A av format $m \times n$. Den avbildning som till varje vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ tillordnar en vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ genom operation

$$A\vec{u} = \vec{v}$$

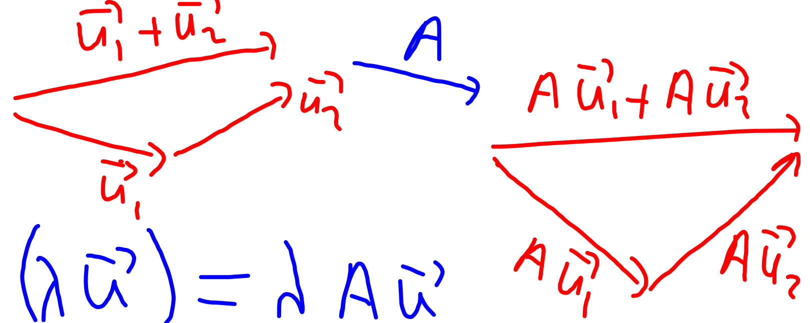
sägs vara en linjär avbildning. A är avbildningsmatris

$$A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{u} \longrightarrow A\vec{u} = \vec{v}$$

kallas linjär om

1. $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



2. $A(\lambda \vec{u}) = \lambda A \vec{u}$
3. $A\vec{0} = \vec{0}$

<u>Def 2</u> Hur finnar man matrisen A?

Låt $\underbrace{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_m\}}_{\text{ON-bas i } \mathbb{R}^m} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Till avbildning $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associeras matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & & A\vec{e}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Ex3 Tolka avbildningen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \xrightarrow{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y-x \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^3}$$

Lösning

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

obs! Vi söker matrisen A som gör jobbet

$$\begin{cases} y-x = v_1 \\ 2y = v_2 \\ x+y = v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

<u>SVAR</u> matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Kolla</u> $A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>EX4</u> För den linjär avbildning $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2$ gäller att

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Bestäm matrisen A och bilden av $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

<u>Lösning</u>

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2$$

menas att A är av formatet 2×2 dvs låt

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overset{(1)}{\begin{cases}2a+b=2\\ 2c+d=3\end{cases}}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overset{(2)}{\begin{cases}a+b=1\\ c+d=1\end{cases}}$$

Ur (1) och (2) kan man lösa ut a, b, c, d.

$$\begin{cases}2a+b=2\\ a+b=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2c+d=3\\ c+d=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}c=2\\ d=-1\end{cases}$$

Delsvar $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Kolla! $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = [\text{måste}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ok!}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [\text{måste}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

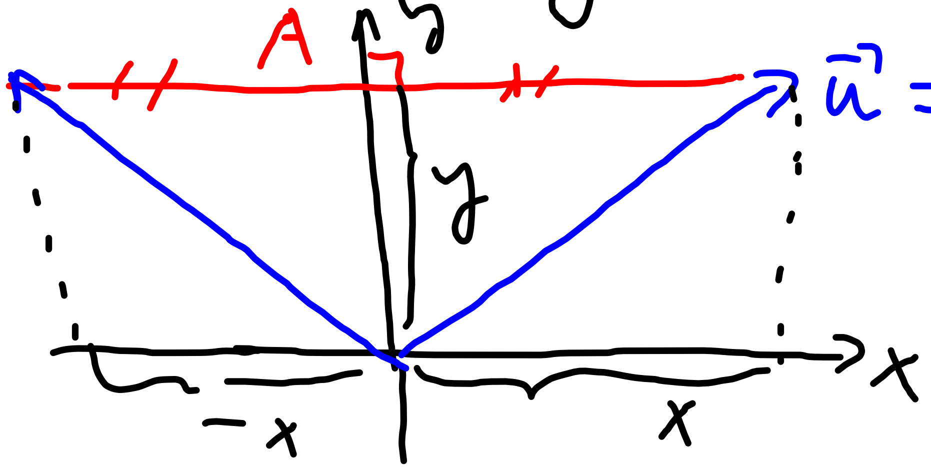
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3p

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EX 5 Ex på geometriska betydelse av matrisen A

Spegling i y-axeln



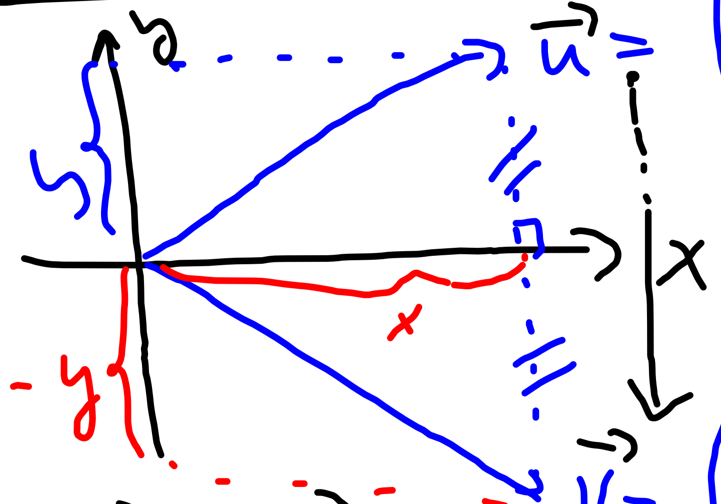
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{u} = \vec{v} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x = v_1 \\ y = v_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Spegling i x-led



$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

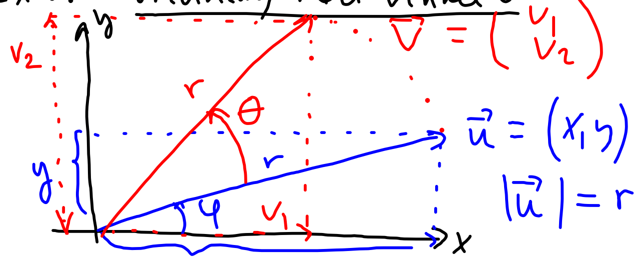
$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Sök A: $A\vec{u} = \vec{v}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v_1 \\ -y = v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

EX 6. Vridning med vinkel θ



$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$v_1 = r\cos(\theta+\varphi)$, $v_2 = r\sin(\theta+\varphi)$

$v_1 = r\cos(\theta+\varphi) = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)$

$= \underbrace{(r\cos\varphi)}_{x}\cos\theta - \underbrace{(r\sin\varphi)}_{y}\sin\theta$

$$\boxed{v_1 = x\cos\theta - y\sin\theta}$$

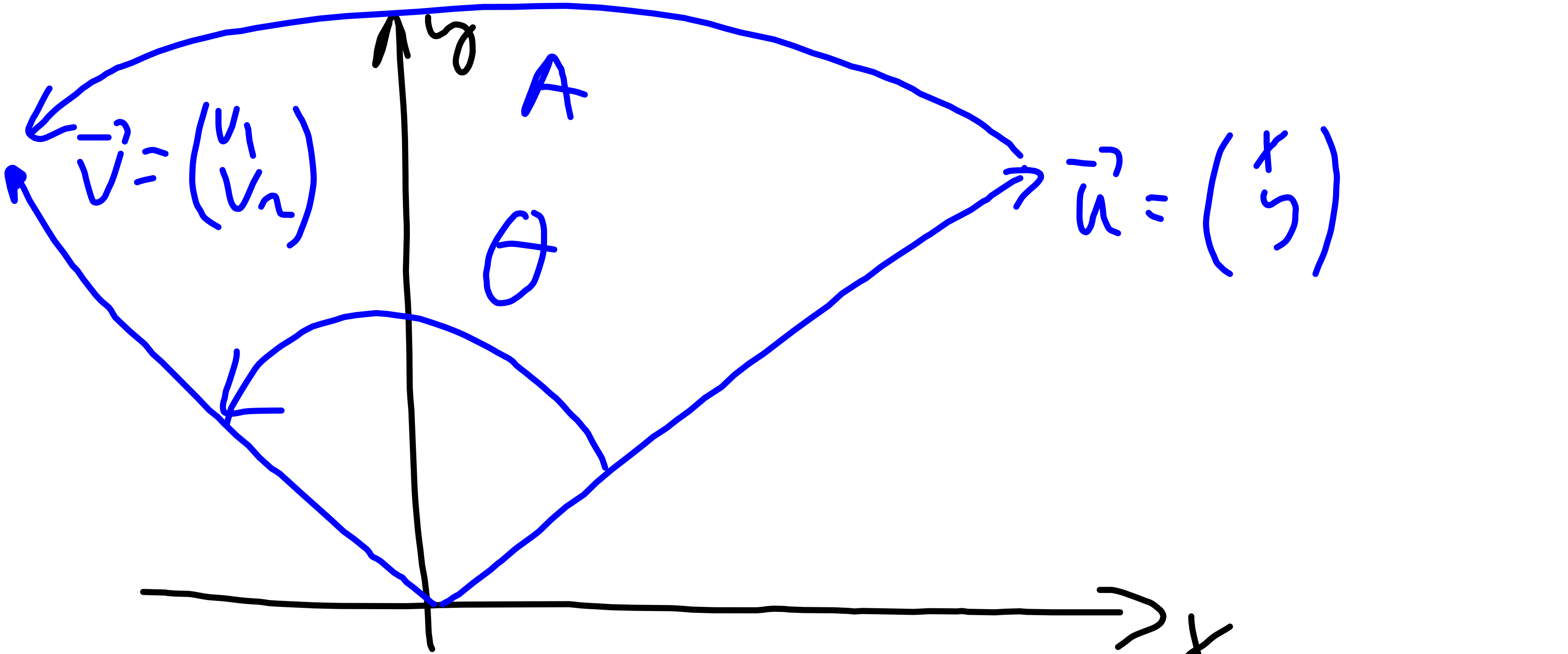
$v_2 = r\sin(\theta+\varphi) = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)$

$= \underbrace{(r\sin\varphi)}_{y}\cos\theta + \underbrace{(r\cos\varphi)}_{x}\sin\theta$

$v_2 = y\cos\theta + x\sin\theta$

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = v_1 \\ y\cos\theta + x\sin\theta = v_2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotationsmatris i } \mathbb{R}^2 \text{ med vinkel } \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$



$$A\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Sammansatta avbildningar

varför $AB \neq BA$

$A\vec{x} = \vec{y}$, $B\vec{y} = \vec{z}$

vill veta: Hur kommer jag från

$\vec{x} \longrightarrow \vec{z}$

$$B\vec{y} = \vec{z} = [A\vec{x} = \vec{y}] = BA\vec{x} = \vec{z}$$

Vi har funnit att produkten
BA transformera $\vec{x}$ på $\vec{z}$

dvs $\vec{x} \xrightarrow{BA} \vec{z}$

Vad är AB? $\left(A\underbrace{B\vec{y}}_{\vec{z}} = A\vec{z} \; ??\right)$

A verkar på $\vec{x}$ och inte $\vec{z}$

$\therefore AB \neq BA$

Om $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \vec{y}$ (skall tas fram) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$

$B\vec{y} = \vec{z}$ (skall tas fram)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

$(BA)\,\vec{x} = \underset{\uparrow \text{skall}}{\vec{z}} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{BA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$\therefore BA\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{z}$

Kontrollera (bra uppgift)

$$AB \neq BA$$