Förel 3. §2.1–2.2 Om matriser.

Def 1. Ett rektangelärt schema där antalet rader $= r$ och antalet kolonner $= k$ kallas för en matris av typ $r \times k$ eller av format $r \times k$ och tecknas

$$A = (a_{ij})_{r\times k} \quad \text{dvs}$$

$$= \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{rad } 1 \\ \leftarrow \text{rad } 2 \\ \\ \leftarrow \text{rad } r \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow \text{kol}_1 & \uparrow \text{kol}_2 & & \uparrow \text{kol}_k \end{array} & \end{array}$$

Ex 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & \pi & e \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad \begin{array}{l} 2 \text{ rad} \times \\ 3 \text{ kol} \end{array}$$

Def 2 Transponering av A: tecknas A^t definieras som den matris som fås genom att man byter rader mot kolonner.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & \pi & e \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & \pi \\ 2 & e \end{pmatrix}$$

obs! $(A^t)^t = A$

Om A är av format $r \times k \Leftrightarrow A^t$ är av format $k \times r$ och $(A^t)^t = A$

Addition av matriser

Två matriser av $\boxed{\text{samma format}}$ kan adderas (substraheras). Addition (substraktion) görs $\boxed{\text{elementvis}}$

Ex

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & \pi & e \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 & 3+2 \\ 4+a & 5+\pi & 6+e \end{pmatrix}}_{C}$$

multiplikation med en konstant λ

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda \alpha & \lambda \beta & \lambda \gamma \end{pmatrix}$$

likhet mellan två matriser

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$A = B \iff 4 = a,\ 2 = b,\ 1 = c,\ 5 = d,\ 7 = e,\ 8 = f$

Symmetriska matris

Matrisen M sages vara symmetrisk om $M = M^t$ dvs

M måste vara av format $n \times n$ (kvadratisk)

Ex

$$M = \begin{pmatrix} a & 7 & 3 \\ 7 & b & 4 \\ 3 & 4 & c \end{pmatrix} = M^t$$

Huvud diagonal

Ex

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ diagonal matris

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I =$$ enhets matris

Ex

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ nollmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

om diagonal matris

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ behöver inte alla vara 0 (men kan alla vara 0)

Produkt av två matriser

Givna två matriser $A_{r\times k}$, $B_{n\times m}$ då definieras produkten:

$$A_{r\times k} \overset{\text{lika}}{=\!=} B_{n\times m} = C_{r\times m}$$

$\Leftrightarrow k=n \Leftrightarrow$ antalet kolonner k i A = antalet rader n i B

EX $A = (a_1 \; a_2 \; a_3 \cdots a_n) = \vec{r}$

format $1\times n$ = radmatris eller radvektor

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{k}$, format $n\times 1$ kolonn matris eller kolonnvektor

$$AB = \underbrace{(a_1 \; a_2 \dots a_n)}_{\vec{r}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{k}} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$\boxed{\vec{r}\bullet\vec{k} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \text{ kallas för skalärprodukten mellan radvektor } \vec{r} \text{ och kolonnvektor } \vec{k}.}$

EX $\vec{r} = (1 \; 2 \; 3)$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\vec{r}\cdot\vec{k} = (1 \; 2 \; 3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$1\cdot a + 2\cdot b + 3\cdot c = \text{TAL}$$

Hur man multiplicera två matriser

$$A_{n\times k} \; B_{k\times m} = C_{n\times m}$$

Antalet kolonner i A = Antalet rader i B

$$A_{n\times k} = \begin{pmatrix} \cdots & \vec{r}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{r}_2 & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \vec{r}_n & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rad } 1 \\ \leftarrow \text{rad } 2 \\ \\ \leftarrow \text{rad } n \end{array}$$

$$B_{k\times m} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{k}_1 & \vec{k}_2 & \cdots & \vec{k}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{kol}_1 & \text{kol}_2 & \text{kol}\, m \end{array} \end{array}$$

$$A_{n\times k} B_{k\times m} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1\cdot\vec{k}_1 & \vec{r}_1\cdot\vec{k}_2 & \cdots & \vec{r}_1\cdot\vec{k}_m \\ \vec{r}_2\cdot\vec{k}_1 & \vec{r}_2\cdot\vec{k}_2 & \cdots & \vec{r}_2\cdot\vec{k}_m \\ \vdots & & & \\ \vec{r}_n\cdot\vec{k}_1 & \vec{r}_n\cdot\vec{k}_2 & \cdots & \vec{r}_n\cdot\vec{k}_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= C_{n\times m}$$

Ex

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = AB$$

AB är väldefinierad ty antalet kolonner i A = antalet rader i B

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 4\cdot 7 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 7 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 7 + 2\cdot 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ex

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 3x + 0y \\ 1x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=0 \\ 3x+0y=0 \\ 1x+2y=0 \end{cases}$$

Ex

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&2\\3&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{pmatrix}$$

$c_{11} = 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 8$

$c_{12} = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$

$c_{13} = 0\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 8$

$c_{21} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)3 = 4$

$c_{22} = 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + (-1)0 = 0$

$c_{23} = 3\cdot 2 + 2\cdot 2 + (-1)3 = 7$

BRA EX om $AB = BA$ så säges att matriserna A och B kommuterar

obs! $AB = BA$ (Ej sant)

Kolla $A = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ noll matris

$$\boxed{\text{obs! } AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ eller } B = 0}$$

matriser är inga TAL eller vektorer

$$BA = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Räknelagar Om produkten är definierad, I = Enhetsmatris

1. $AI = IA = A$
2. $A0 = 0A = 0$ noll matris
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $A^n A^m = A^{n+m}$
5. $(A^n)^m = A^{n\times m}$

Testövning

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Bestäm $(A^t - B)A = ?$

Lösning

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^t - B)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

enhetsmatris av format 2×2

OBS! Tack för David J. Ander...

finns föreläsnings anteckn. ..

på kursens hemsida