Test 1

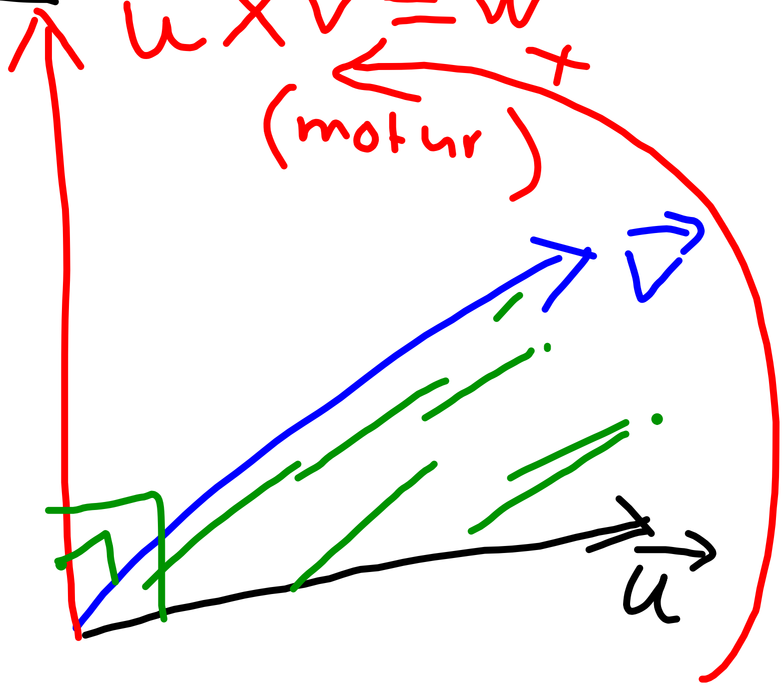
2

Förel n°2: §§ 1.4 — 1.5

Vektor produkt
Ekvation linje
—//— plan

Vektorprodukt = Kryssprodukt

Def $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$



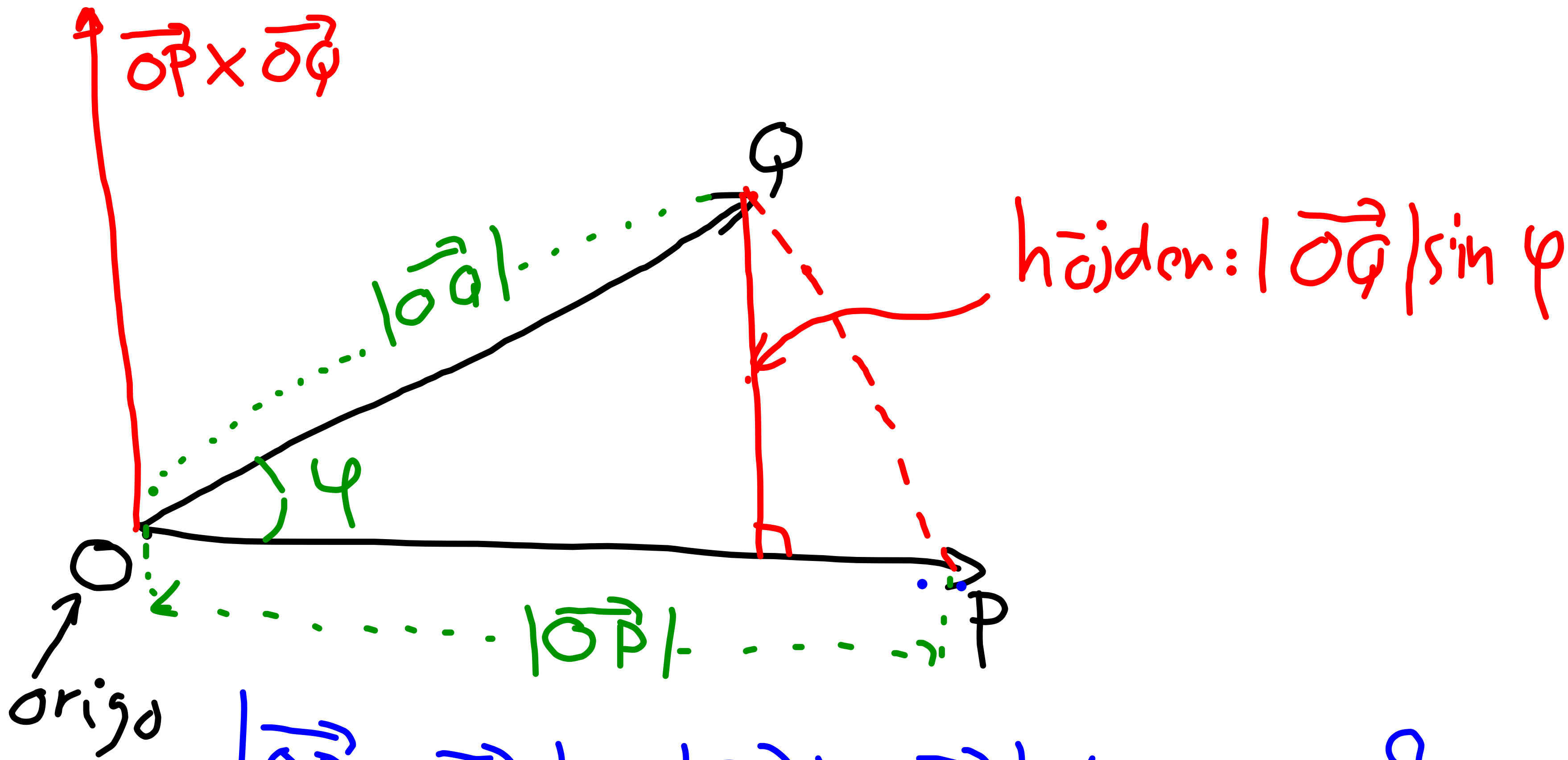
Kryssprodukt av $\vec{u}, \vec{v}$ är den vektor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ som $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$. Har följande föreskrifter

1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi$

2) $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$, $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

3) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ bildar en höger orienterad system.

Geometrisk tolkning av $\vec{u} \times \vec{v}$



$$|\vec{OP} \times \vec{OQ}| = |\vec{OP}|\,|\vec{OQ}| \sin\varphi = 2 \text{ ggr}$$

arean av $\Delta(OPQ)$

TÄNK på regler

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

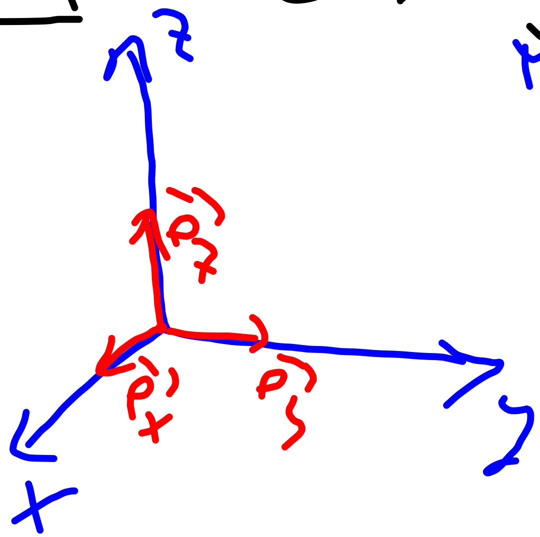
2. $(\lambda\vec{u})\times\vec{v} = \lambda(\vec{u}\times\vec{v})$

3. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\,//\,\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}=\lambda\vec{v}$ konst.

t.ex $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

$$\left[\,|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi\right.$$

Ex ON-system $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$



Multiplikations tabell

$\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z$ $\qquad$ $\vec{e}_x\times\vec{e}_x = \vec{0}$

$\vec{e}_y\times\vec{e}_z = \vec{e}_x$ $\qquad$ $\vec{e}_y\times\vec{e}_y = \vec{0}$

$\vec{e}_z\times\vec{e}_x = \vec{e}_y$ $\qquad$ $\vec{e}_z\times\vec{e}_z = \vec{0}$

Komponenträkning i ON-bas $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

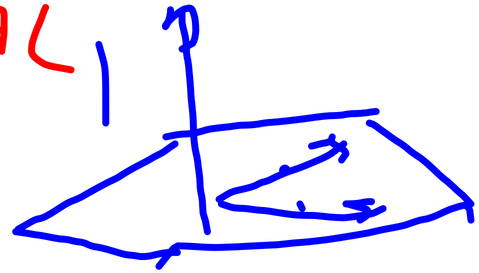
$$\vec{u}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z) \times (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z)$$

$$= [\text{mha multiplikationstabell}] =$$

$$= \underbrace{(y_1z_2 - z_1y_2)}_{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \text{TAL}}\vec{e}_x - \underbrace{(x_1z_2 - z_1x_2)}_{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \text{TAL}}\vec{e}_y + \underbrace{(x_1y_2 - y_1x_2)}_{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{TAL}}\vec{e}_z$$



$$\cancel{(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Minnesregel

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rad } 1 \\ \leftarrow \vec{u}_1 \\ \leftarrow \vec{u}_2 \end{array} =$$

$\uparrow$ kol 1 $\quad \uparrow$ kol 2 $\quad \uparrow$ kol 3

$+ \quad - \quad +$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

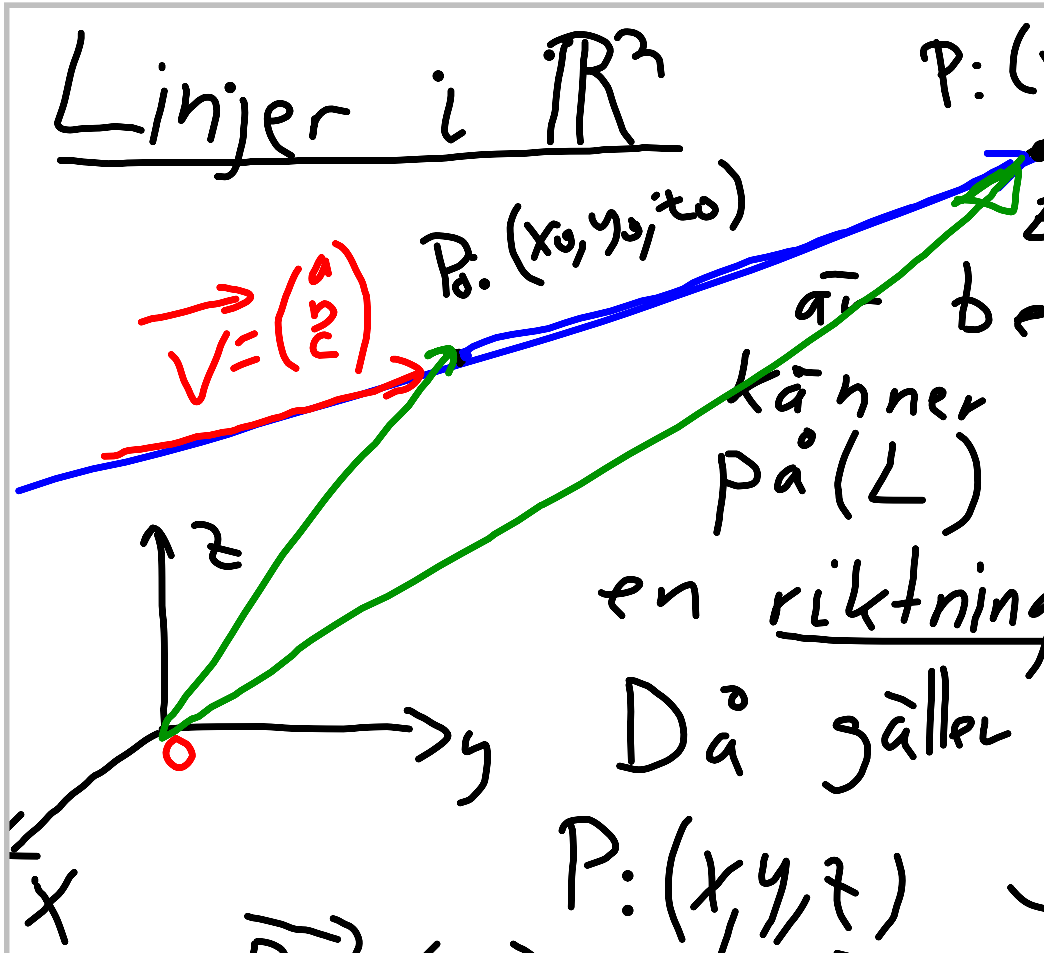
Def

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 :$$

Determinant av ordning 2

2 rader och 2 kolonner

Linjer i $\mathbb{R}^3$



En rätlinje (L) i $\mathbb{R}^3$ är bestämd, om vi känner en punkt $P_0:(x_0,y_0,z_0)$ på (L) $(P_0 \in (L))$ och en riktningsvektor $\boxed{\vec v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}$

Då gäller att en godt punkt

$P:(x,y,z) \in (L) \iff$

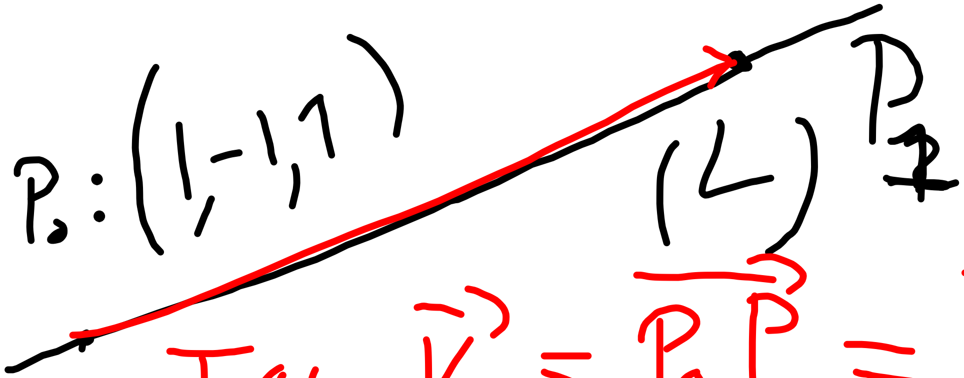
$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec v \iff \overrightarrow{P_0P} = t\vec v$ (t parameter)

$\iff \boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec v}$ på vektorform

$\iff (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$

EX 1 Bestäm ekv för linjen (L) som går genom $P_0:(1,-1,1)$, $P_1:(3,5,2)$

Lösning. Vi behöver en riktningsvektor $\vec{v}$ och en punkt t.ex P_0



Tag $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ekv. för (L) blir med $P:(x,y,z) \in (L)$

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v} \iff$$

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(2, 6, 1)$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 6t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

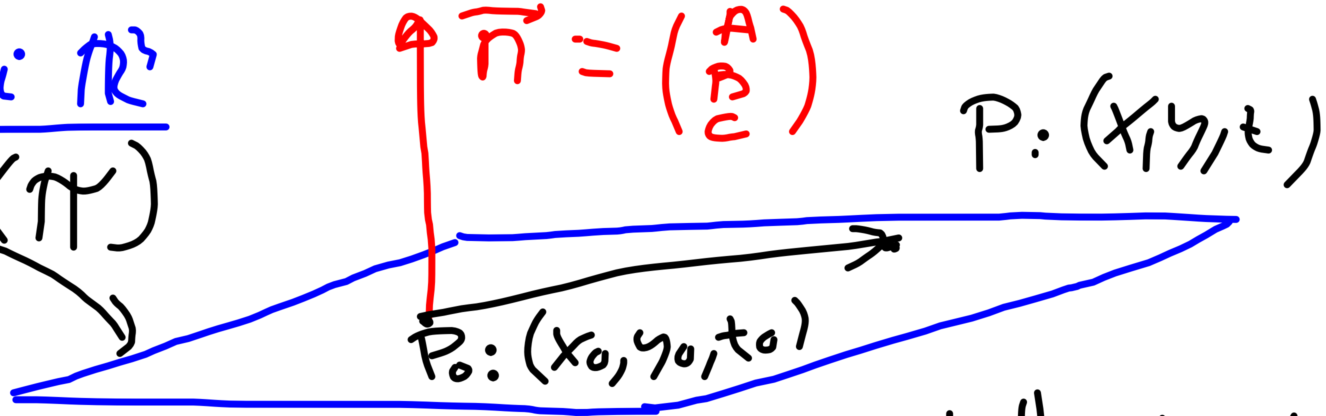
SVAR

Alt

$$\boxed{\vec{p}(t) = (1, -1, 1) + t(2, 6, 1) \quad t \in \mathbb{R}}$$

Plan i $\mathbb{R}^3$

plan (Π)



Def Med normalvektorn till ett givet plan (Π) menas en vektor $\vec n = \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$ som är vinkelrät mot varje vektor som ligger i planet.

Ekvation för (Π). Låt $P:(x,y,z) \in (\Pi)$.

Då gäller att $\vec n \perp \overrightarrow{P_0P} \iff$

$$\boxed{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec n = 0}$$ Vektorform

Ett sätt att skriva ekv för planet

$P:(x,y,z)$, $P_0:(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0 \iff \underbrace{(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0)}_{\overrightarrow{P_0P}}\cdot(A,B,C)$$

$$= A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

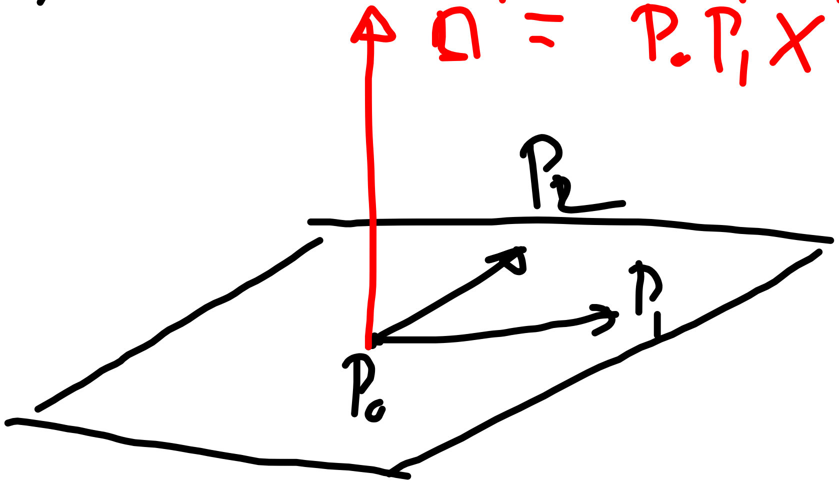
$$\iff Ax+By+Cz+D=0$$

där $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

<u>Def</u>. uttrycket $Ax+By+Cz+D=0$ kallas för normalekvation för det plan som har normalvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$.

EX Bestäm ekv för det plan som innehåller $P_0 : (1,1,0)$, $P_1 : (0,1,1)$ och $P_2 : (1,0,1)$

Lösning om $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ till planet är känd så fås dess ekv via $Ax + By + Cz + D = 0$



$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \overrightarrow{P_0P_1} \\ \leftarrow \overrightarrow{P_0P_2} \end{array}$$

$$= \vec{e}_x \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{0\cdot 1-(1)(-1) = 1} - \vec{e}_y \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{(-1)(1)-(0)(1) = -1} + \vec{e}_z \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{(-1)(-1) - (0)\cdot(0) = 1}$$

$$= 1\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sätt $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i ekvationen

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x+y+z+D=0 \quad (*)$$

För att få värdet på D

Sätt in i $(*)$ t ex P_0:

$(1,1,0)$ och då fås

$$1+1+0+D=0$$

$$\Longrightarrow D=-2.$$

SVAR

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=x+y+z-2=0}$$

$$
\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}
\qquad
\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_0 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_0 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
$$

Determinant av ordning 3

3 Rader och 3 kolonner

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & + & - & + & - \\
+ & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\
- & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
+ & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
- & a_3 & b_3 & c_3 & d_3
\end{array}
= a_0 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \mp
$$

$$
- a_1 \Big|
$$