Rep via gamla tentatal:

EX1. Sök för varje (parameter) reellt tal a Lösningarna till

$$(*)\begin{cases} 2x+y+az=0 \\ 2x+3y+az=4 \\ ax+y+2z=-2a \end{cases}$$

Lösning: Lös $(*)$ via eliminationsmetod (Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 0 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ a & 1 & 2 & -2a \end{array}\right) \overset{\cdot\frac{1}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ a & 1 & 2 & -2a \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ -a \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 0 & \cancel{2}\,1 & 0 & \cancel{4}\,2 \\ 0 & 1-\frac{a}{2} & 2-\frac{a^2}{2} & -2a \end{array}\right) -(1-\tfrac{a}{2})$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\frac{a^2}{2} & -(a+2) \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$2x+y+az=0 \quad (1)$$
$$y=2 \quad (2)$$
$$\left(2-\frac{a^2}{2}\right)z=-(a+2) \quad (3)$$

VL(3): $2-\frac{a^2}{2}=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

om $a=2$, $VL(3)=0$, $HL(3)=-4$ orimligt
dvs för $a=2$ ger inga lösningar.

om $a=-2$, $VL(3)=0$, $HL(3)=0$
Sätt in $a=-2$ i (1) och (2)

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-2z=0 \\ y=2 \end{array}\right\}$$ Två plan som skär varandra längs en rät linje.

t.ex $x=t \Rightarrow z=t+1$

delsvar $a=-2$, $(x,y,z)=(t,2,t+1)$, $t\in\mathbb{R}$
∞ - många lösningar

om $a\neq 2$, $a\neq -2$ $\det(A)\neq 0$
$\Rightarrow$ systemet har unik lösning

SVAR
$a\neq 2, a\neq -2$ unik lösning
$a=2$ systemet saknar lösning
$a=-2$ ∞ - många lösningar
$(x,y,z)=(t,2,t+1)$

Title: dec 15-09:21 (1 of 4)

EX2 matrisen A har egenvärden 1 och 2 med motsvarande egenvektorer $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

Bestäm A

VET ATT $A\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{f}_1}=\underbrace{1}_{\lambda_1}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{f}_1}$, $A\underbrace{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}_{\vec{f}_2}=\underbrace{2}_{\lambda_2}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}_{\vec{f}_2}$

Bilda övergången matrisen $P=\begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2\end{pmatrix}$

P diagonalisera A om

$\{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$ bildar en bas $\Leftrightarrow$ linjärt oberoende

$\Leftrightarrow \det(P)\neq 0 \Leftrightarrow P^{-1}$ finns

$$P^{-1}AP=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}}_{D=\text{diagonal}}$$

obs! $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $\det(P)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$

lh: $P^{-1}AP=D \Leftrightarrow$

$$\underbrace{PP^{-1}}_{I}AP=PD \Leftrightarrow AP=PD$$

$$A\underbrace{PP^{-1}}_{I}=PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A=PDP^{-1}}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 15 & -4\end{pmatrix}$$

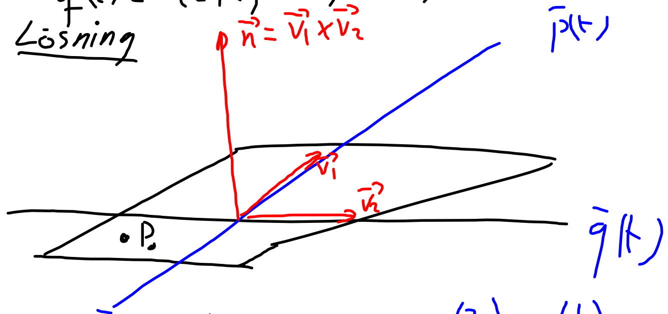
OBS! $A\neq A^t$

EX3 Bestäm ekvationen för det plan som innehåller $P_0:(1,0,3)$ och är // med

$\bar{p}(t) = (2+t, -1+3t, 7t)$

$\bar{q}(t) = (2+t, -1-t, 7+4t)$

<u>Lösning</u>



$\bar{p}(t) = (2+t, -1+3t, 7t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}$

$\bar{q}(t) = (2+t, -1-t, 7+4t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$

Ekvationen för ett plan bestäms av

① en punkt P_0

② $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normalen

om $\underline{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ligger i planet

$\overline{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \iff Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$

① Finn $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ sätts in i (1)

② Finn D via att sätt in P_0 (given)

<u>Altern. 2</u> in $\overline{P_0P} \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{P_0P} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}_{\text{Trippelprodukt} = \det(\ )} = 0$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \overrightarrow{P_0P} \\ \leftarrow \vec{v}_1 \\ \leftarrow \vec{v}_2 \end{matrix} = \underbrace{19x + 3y - 4z - 7 = 0}_{\text{SVARET}}$$

EX 4 Anpassa i minsta kvadratmetodens mening $(0,3)$, $(1,1)$ och $(2,0)$ till kurvan

$ax + b\,f(x) = y$, $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f(2)=1$

Lösningsmetod

$$ax + b\,f(x) = y$$

$$\left.\begin{array}{ll} (0,3) \Rightarrow & a\cdot 0 + b\,f(0) = 3 \Leftrightarrow 4b = 3 \\ (1,1) \Rightarrow & a\cdot 1 + b\,f(1) = 1 \Leftrightarrow a + 2b = 1 \\ (2,0) \Rightarrow & a\cdot 2 + b\,f(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Normalekvationerna blir då

$$\boxed{A^t A \vec{x} = A^t \vec{b}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Löses t.ex via Cramers regel

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 14 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 21 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 21 \end{vmatrix}}$$

$$a = -\frac{35}{89}, \quad b = \frac{66}{89}$$

SVAR $y = ax + b\,f(x) = -\frac{35}{89}x + \frac{66}{89}f(x)$