Förel 18 Vektorrum (Reella vektorrum)

En mängd V sägs vara ett vektorrum om följande axiom är uppfyllda

1. Addition $u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$

   multiplikation med konstant λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \Rightarrow \lambda v \in V$

2. Räkneregler $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

$$(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$$

Finns enhet här 1

$$1u = u$$

addition kommutativ: $u+v = v+u$

— " — associativ $u+(v+w) = (u+v)+w$

3. Innehåller neutral element: nolla 0

$$u+0 = 0+u = u$$

4. Invers map addition

$$v+(-v) = 0$$

EX 1 a) Rummet $\mathbb{R}^n$

b) $C[a,b] = \{$alla kontinuerliga funktioner på ett slutet och begränsat (kompakt) intervall $[a,b] = a \leq x \leq b\}$

c) $C^n(a,b) = \{$att $f^{(k)}(x) = \frac{df^k}{dx^k}$, $k=0,..n$ kontinuerliga på $a<x<b$

$\dim(V) =$ antalet linjära oberoende element i V

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

$C^2(a,b)$ är ett vektorrum

$f \in C^2(a,b) \Rightarrow f, f', f''$ kont

$g \in C^2(a,b) \Rightarrow g, g', g''$ kont

$f+g \Rightarrow f+g, f'+g', f''+g''$ kont

$f+g \in C^2(a,b)$

<u>Def 2</u> Delrum = Underrum

W säges vara ett underrum till vektorrummet V och tecknas

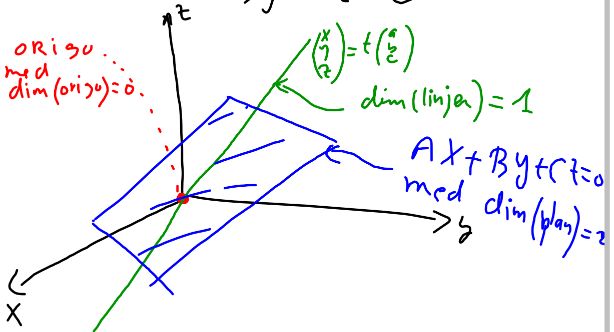
$$W \subset V$$

om ① $f, g \in W \Rightarrow f+g \in W$

② $\lambda \in \mathbb{R},\ f \in W \Rightarrow \lambda f \in W$

<u>Ex</u> i $\mathbb{R}^3$ är följande underrum
måste innehålla 0

1. ORIGO
2. Alla linjer som går genom origo
$(x,y,z) = t\underbrace{(a,b,c)}_{\vec{v} = \text{riktningsvektor}}$
3. Alla plan som går genom origo
$$Ax+By+Cz=0$$



<u>Ex</u> $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A $(n \times n)$-matris

$W = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$

ty $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in W \Rightarrow A(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = \underbrace{A\vec{x}_1}_{\vec{0}} + \underbrace{A\vec{x}_2}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\therefore \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W$

$\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in W:\quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda \underbrace{A\vec{x}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$

$\therefore \lambda\vec{x} \in W$

<u>Ex</u> $W = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{b} \neq \vec{0}\}$

Ej underrum

ty $\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in W \Rightarrow A(\lambda\vec{x}) = \lambda \underbrace{A\vec{x}}_{\vec{b}} = \lambda\vec{b} \neq \vec{b}$ om $\lambda \neq 1$

Skalärproduktrum = Euklidiskt rum = inre produkt rum

Vi säger att vektorrummet H (Hilbert)

då $\dim(H) \begin{cases} = \infty \\ < \infty \end{cases}$

är ett skalärproduktrum med

skalär produkt (u, v), $u \in H$, $v \in H$

med följande egenskaper

1. $(u, v) = (v, u)$
2. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$
3. $(\lambda u, v) = \lambda (u, v)$
4. $(u, u) = \|u\|^2 \geq 0$

   $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ normen (längd av u)

5. $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Ex 1 i $\mathbb{R}^3$ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

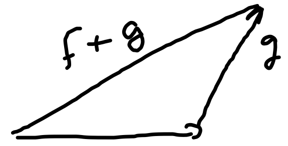
$$(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Ex 2 $C[a, b]$ introduceras

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

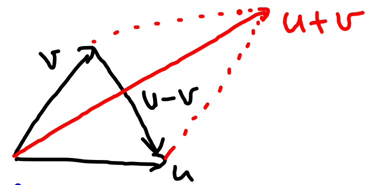
$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2}$$

Likheter - olikheter i ett skalärproduktrum



$$||f+g|| \le ||f|| + ||g||$$

(Triangelolikhet)



$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$$

Parallellogram lagen

Cauchy-Schwartz olikhet

$$|(f,g)| \le ||f|| \, ||g||$$

t.ex i $C[a,b]$

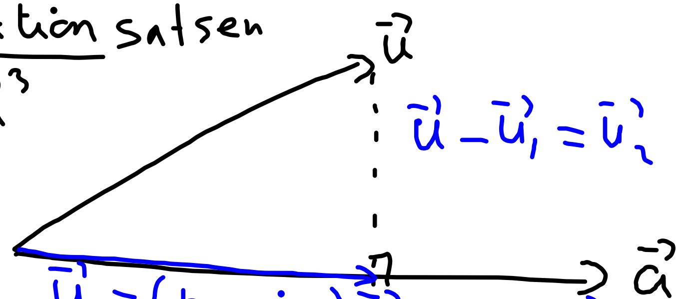
$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

$$|(f,g)|^2 \le ||f||^2 \, ||g||^2$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,dx \int_a^b g(x)^2\,dx$$

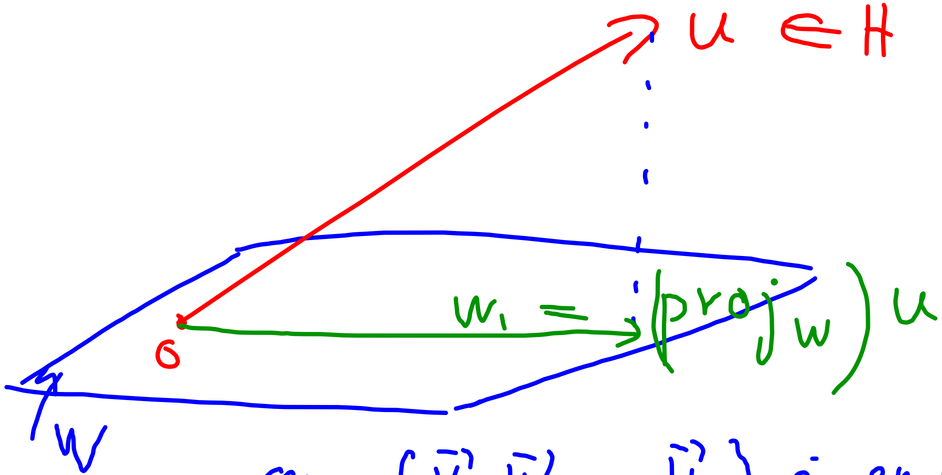
Projektionsatsen

i $\mathbb{R}^3$



$$\vec{u}_1 = \left(\text{proj}_{\vec{a}}\right)\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

i ett skalärproduktrum H med ett underrum $W \subset H$



om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ är en bas i W

$$w_1 = (\text{proj}_W)\,u = \sum_{k=1}^{n} \frac{(u, v_k)}{\|v_k\|} v_k$$

Ex $W \subset \mathbb{R}^3$

$$W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}\right]$$

$$u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Den ortogonala projektionen av vektorn u på W med basen v_1 och v_2 ges av

$$(\mathrm{proj}_W)\, u = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2} v_1 + \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2$$

$$= \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

Obs! $\|\vec{v}_1\| = 1$, $\|\vec{v}_2\| = 1$

$$\lambda_1 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2} = (\vec{u}, \vec{v}_1) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \vec{u}^t \vec{v}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{(\vec{u}, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2} = (\vec{u}, \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathrm{proj}_W)\, \vec{u} &= \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \\ &= \vec{v}_1 - \frac{1}{5} \vec{v}_2\end{aligned}}$$

Gram-schmids metod

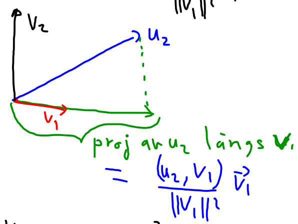
Varje skalär produkt rum av dimension n<∞ har en ON-bas

Förklaring Låt $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en bas för rummet dvs de är linjärt oberoende. Då gäller att vi kan framta en ON-bas

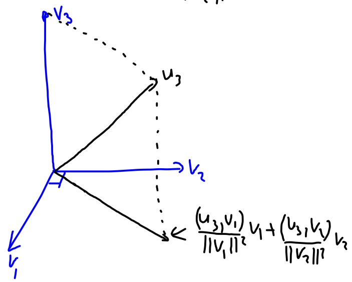
Metod

steg 1 $v_1 = u_1$

steg 2 $v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1$



steg 3 $v_3 = u_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{(u_3, v_k)}{\|v_k\|^2} v_k$



steg n

$$v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(u_n, v_k)}{\|v_k\|^2} v_k$$