Förel nº16: In Kompendiet: Induktionsbevis-Komplexatal I.

A. Induktion bevis

Ex1 Betrakta formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$n = 1, 2, 3, \dots\dots$

Vi kollar

$n=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} k^2 = \underline{1}^2 = \frac{2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 + 1}{6} = 1$ Sant

$n=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2} k^2 = \underbrace{1^2+2^2}_{5} = \boxed{?} = \frac{2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 2}{6} = \frac{30}{6} = 5$ Sant

Fråga. ÄR likheten sant fä alla $n = 1, 2, 3, \dots\dots$

Då man har att bevisa att ett Påstående $P(n)$ är sant för oandlig många heltal n är induktion en praktisk bevismetod.

Induktionsprincipen

Låt $P(n)$ vara ett påstående som beror på heltalet n, $n=1,2,3,\ldots\ldots$

Steg1 kolla att $P(1)$ är sant dvs $P(n)$ för $n=1$ är sant

Steg2 $P(m) \Longrightarrow P(m+1)$, $m \geq 1$

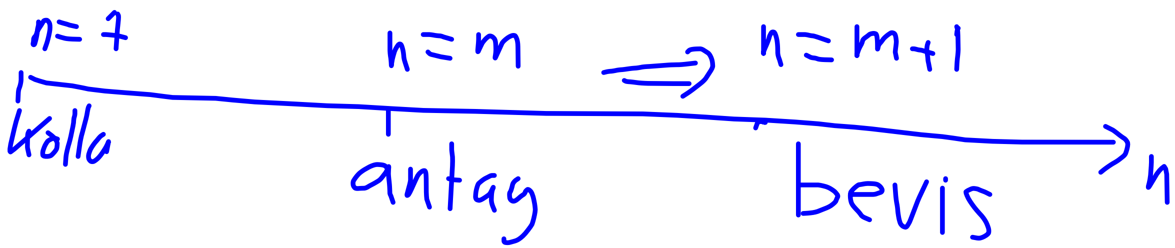
dvs antag att $P(n)$ är sant för $n=m\geq 1$

Visa då att $P(n)$, är sant $n=m+1$

Steg3 slutsatsen: $P(n)$ är sant för alla heltal $n=1,2,\ldots\ldots$

$$P(m) \Longrightarrow P(m+1)$$

$$P(1) \Longrightarrow P(2) \Longrightarrow P(3) \Longrightarrow (P4) \Longrightarrow \ldots\ldots$$



EX2 Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, $n=1,2,\ldots$

Lösning Sätt $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ $(*)$

Steg1 kolla att $P(1)$ sant

$VL(*)$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = 1/2$

$HL(*)$ $\frac{1}{1+1} = 1/2$

$VL(*) = HL(*)$ då $n=1$

$P(1)$ är sant

Steg2 $P(m) \Longrightarrow P(m+1)$

Antag att $P(n)$ är sant för $n=m$

dvs

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}}_{P(m)} \quad \text{sant}$$

Visa då att $P(n)$ är sant för $n=m+1$

dvs under villkor att $P(m)$ är sant

Visa då att

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{(m+1)+1}}_{P(m+1)} \quad \text{är sant}$$

"Bevis"

Börja med VL $(P(m+1))$ och räkna ut att det blir $=$ HL $(P(m+1))$

$VL\ (P(m+1))$: $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} =$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}}_{\underbrace{VL\ P(m) = HL\ P(m)}_{\frac{m}{(m+1)}}} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)((m+1)+1)}}_{k=m+1} =$$

$$= \frac{m}{(m+1)} + \frac{1}{(m+1)\underbrace{((m+1)+1)}_{m+2}}$$

$$= \frac{m(m+2)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{\overbrace{m^2+2m+1}^{(m+1)^2}}{\cancel{(m+1)}(m+2)}$$

$$= \frac{m+1}{m+2} = HL\ P(m+1)$$

Steg3 $P(m) \Longrightarrow P(m+1)$ är sant ger att $P(n)$ är sant för $n=1,2,\ldots$

Ex3 Visa att 5^n+3 är jämnt delbart med 4 för $n=0,1,2,\ldots$

Lösning. 5^n+3 är jämnt delbart med 4 menas att $5^n+3 = q \cdot 4$ (*)

q heltal

Steg 1 Kolla att Påstående är sant för $n=0$.

VL(*) för $n=0$ är $5^0+3 = 4 = 1 \cdot 4$ ← q

VL(*) = HL(*) = $1 \cdot 4$ ← q

Steg 2 $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ sant

antag att (*) är sant för $n=m$

dvs $5^m+3 = q_1 \, 4$ $(q_1 \neq q)$

Visa då att $5^{m+1}+3 = q_2 \, 4$ $(q_1 \neq q_2 \neq q)$

"Bevis" VL $P(m+1)$ är

$$5^{m+1}+3 = \underbrace{5}_{(1+4)} \cdot 5^m + 3 = (1+4)5^m + 3 =$$

$$= \underbrace{5^m+3}_{\text{delbart med 4 enligt}} + \underbrace{4 \cdot 5^m}_{\text{delbart med 4}} = q_2 \, 4$$

P(m) är sant

dvs $5^m+3 = q_1 \, 4$

∴ Vi har visat att $5^{m+1}+3$ är delbart med 4.

Steg 3 $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

5^n+3 är delbart med 4, $n=0,1,\ldots$

B. Om komplexa tal

$\mathbb{R} = \{$alla reella tal$\}$

ex1 $x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \in \mathbb{R}$.

men $x^2 = -1 \implies x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Ty för alla $a \in \mathbb{R}$ gäller att $\sqrt{a}$ definierad endast då $a \geq 0$

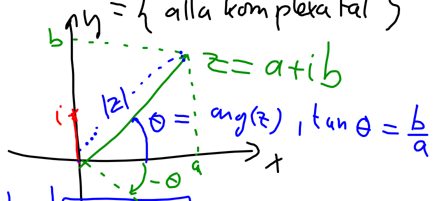
obs! $\sqrt{ab} = (\sqrt{a})(\sqrt{b})$ endast då $a \geq 0$, $b \geq 0$

$\boxed{\text{Def } \sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1}$

Finn Felet

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \overset{?}{=} \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\,\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = i^2 = -1$

Def $\mathbb{C} = \{z = a + ib,\ i^2 = -1,\ a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{$alla komplexa tal$\}$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \bar{z} = a - ib$

$\bar{z} = a - ib$

$|\bar{z}| = |z|$

Räknelagar för $|z|$

1. $|z| = 0 \iff z = a + ib = 0 \iff a = 0, b = 0$
2. $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
   Sp $|z^n| = |z|^n$
3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
4. $\bar{\bar{z}} = z$
5. $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
   $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$

Ex 2 Bestäm $|z^4|$, $z = \frac{(3+4i)(1+i)}{3-4i}$

Lösning $|z^4| = |z|^4$

$$|z| = \left|\frac{(3+4i)(1+i)}{(3-4i)}\right| = \frac{\cancel{|3+4i|}\,|1+i|}{\cancel{|3-4i|}}$$

men $|3+4i| = |3-4i|$ (Regel $|w| = |\bar{w}|$)

$$= |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = 2^{1/2}$$

SVAR $|z^4| = |z|^4 = (2^{1/2})^4 = 2^2 = 4$

Ex 3 Bestäm $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1041}$

Lösning

$$\frac{1+i}{1-i} = \left[\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{\underbrace{(c+id)(c-id)}_{c^2+d^2}} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = A+iB\right] =$$

$$= \frac{(1+i)(1+i)}{\underbrace{(1-i)(1+i)}_{1^2+1^2}} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{(1+i)^2}{2} =$$

$$= \frac{1^2+i^2+2\cdot 1\cdot i}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$$

$\therefore \frac{1+i}{1-i} = i$

och $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1041} = i^{1041}$

VET $i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = (-1)^2 = 1$

$$1041 = \underbrace{1040}_{4\cdot 260} + 1$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1041} = (i)^{1041} = (i)^{1040+1}$$

$$= (i)\,\underbrace{(i)^{\underbrace{1040}_{4\cdot 260}}}_{\underbrace{(i)^{4\cdot 260}}_{\underbrace{(i^4)^{260}}_{1^{260} = 1}}}$$

SVAR $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1041} = i$ ##