Förl nr 15. Egenvärdesproblem IV: Tillämpningar:

Kurvor i $\mathbb{R}^2$ – ytor i $\mathbb{R}^3$

Def 1 Andragradskurvan i $\mathbb{R}^2$ är av formen

$$p(x,y) = \underbrace{ax^2+2bxy+cy^2}_{\text{kvad. del}} + \underbrace{dx+ey+f}_{\text{linj. del}} = 0 \quad (1)$$

uttrycket $Q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$ kallas för en kvadratisk form

$$Q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2 = \underbrace{(x \;\; y)}_{\vec{X}^t}\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

$$= \vec{X}^t A \vec{X} \quad \text{där } A = A^t$$

$Q(x,y) = \vec{X}^t A \vec{X}$ representerar en kurva (γ) i $\mathbb{R}^2$ (xy-planet)

Uttrycket (1) betyder i xy-planet en cirkel, ellips, parabel, hyperbel eller rät linje.

Kurvan (1) kan skrivas på sk standard form eller kanonisk form eller på huvudaxel form och ser ut så här

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \quad \text{ellips}$$

$$(x'-x'_0)^2 + (y'-y'_0)^2 = R^2 \quad \text{cirkel}$$

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \quad \text{hyperbel}$$

$$\frac{x'^2}{a'^2} = y' \quad \text{parabel}$$

Title: dec 1-09:29 (1 of 5)

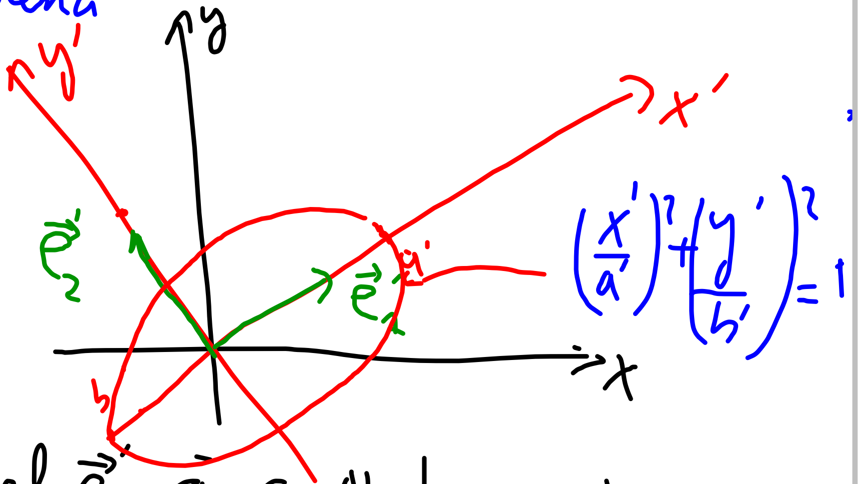
Uträkning på huvudaxelform

eller omskrivning från (x,y)-planet till $x'y'$-planet

$$Q(x,y) = \vec{x}^t A \vec{x} \curvearrowright Q(x',y') = \underbrace{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2}_{\text{kanonisk form av } Q(x,y)}$$

(x',y') är huvudaxeln till kurvan (γ). x' och y' har axelriktningar = riktningar hos egenvektorer till den symmetriska matrisen A och λ_1 och λ_2 är tillhörande "egenvärdena"

"En bild"



där $\vec{e}_1'$ och $\vec{e}_2'$ är ON-bas av egenvektorer till matrisen A

Metod

1. Skriv den kvadratiska formen $Q(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2 = \vec{x}^t A \vec{x}$, $A = A^t$
2. Räkna ut egenvärdena λ_1 och λ_2 till matrisen A : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ och motsvarande ON-egenvektorer $\vec{e}_1{}'$ och $\vec{e}_2{}'$
3. Sätt övergång matrisen P = rotationsmatris = ON-matris med $\det(P) = 1$

obs! $\det(P) = -1$ spegling, då skall $\vec{e}_1{}'$ och $\vec{e}_2{}'$ byta plats

$$P = \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' \end{pmatrix}$$

Obs! $P^t P = P P^t = I \Leftrightarrow P^{-1} = P^t$

4. Kanoniska formen är då

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

EXA. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$6x^2+9y^2+4xy=5$$

Lösning Vill veta vilken typ av kurva i $\mathbb{R}^2$ som ges av $6x^2+9y^2+4xy=5$ (ellips, cirkel, hyperbel, parabel (kolla § 1.6 i kursboken sid 75 ...))

Steg 1 Skriv $\varphi(x,y)=6x^2+9y^2+4xy=5$ på matrisform dvs $\vec{X}^t A\vec{X}=5$

$$\Leftrightarrow \varphi(x,y)=(x\ \ y)^t \underbrace{\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}}_{A=A^t \text{ (måste)}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=5$$

Steg 2 Finn egenvärdena till A

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}6-\lambda&2\\2&9-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(9-\lambda)-4=$$
$$=\lambda^2-15\lambda+50=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=5,\ \lambda_2=10$$

Delsvar på huvudaxeln form blir

$$\varphi(x,y)=6x^2+9y^2+4xy=5$$

$$\curvearrowright \varphi(x',y')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=5$$
$$=5x'^2+10y'^2=5$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{5}x'^2+\frac{10}{5}y'^2=1$$

$$\Leftrightarrow x'^2+2y'^2=1$$

$$x'^2+\frac{y'^2}{\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{}}=1$$

ellips med halvaxlarna

$$a'=1,\ b'=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad : \quad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1$$

Steg 3 Finn en ON-bas $\{\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ av egenvektorer till A.

- Finn egenvektor $\vec{f}_1$ till $\lambda_1=5$

$$(A-5I)\vec{u}_1=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6-\cancel{\lambda}^{5}&2\\2&9-\cancel{\lambda}^{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2\\\cancel{2}&\cancel{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$$

Sätt $y=t$: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t\\t\end{pmatrix}=t\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{f}_1}$.

$$\vec{e}_1'=\frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

- Finn egenvektor $\vec{f}_2$ som svarar mot $\lambda_2=10$

$$(A-10I)\vec{u}_2=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6-10&2\\2&9-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\cancel{-4}&\cancel{2}\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x-y=0 \Leftrightarrow y=2x$$

Title: dec 1-10:25 (4 of 5)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{f}_2}$, $\vec{e}_2{}' = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Delsvar en O.N.-bas av egenvektorer till A ges av $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\det(P) = -1$ inte bra spegling

Vi tar istället

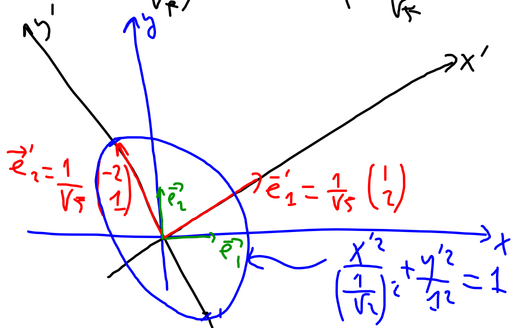
$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\det(P) = 1$ rotation

$\uparrow \vec{e}_1{}'$ $\uparrow \vec{e}_2{}'$

Steg 4 Vi ritar kurvan γ = Ellips

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

med $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$



i $x'y'$-planet är ellipsen ekv:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (y')^2 = 1$$

i xy-planet är ellipsen ekv.

$$6x^2 + 4xy + 9y^2 = 5$$