Förl NR 14: Egenvärdesproblem III

Rep **Problem** Givet en $(n \times n)$-matris A i gamla basen e. Finn en ny bas f så att i denna nya bas matrisen A övergår till en diagonal matris D med sambandet $P^{-1}AP = D$

där $\underline{P} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$ är övergångsmatrisen från basen e till basen f.

Vi säger också att $\underline{P}$ diagonalisera A eller A är diagonaliserbar

Svar Den sökta basen ges av en bas av egenvektorer till A dvs

$$A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k \quad , k = 1, \dots, n$$

obs $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ bas $\Leftrightarrow$ linj. ober.

$\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \cdots & \vec{f}_n \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \cdots & \vec{f}_n \end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vi har sambandet

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$$

obs 1! $\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Ty $\underbrace{\det\left(P^{-1}AP\right)}_{\det(P^{-1})\det(A)\det(P)} = \det(D)$

$$\det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det A \underbrace{\det(P^{-1})\det(P)}_{\det(\underbrace{P^{-1}P}_{I}) = 1}$$

obs 2! $\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}}$

Problem 2 När kan en $(n \times n)$-matris A diagonaliseras.

Svar A kan diagonaliseras

$\iff$ A har n stycken linj. ober egenvektorer

$\iff \det(P) = \left| \vec{f}_1 \ \vec{f}_2 \ \ldots \ \vec{f}_n \right| \neq 0$

Hur gör man?

Diagonalisera en $(n \times n)$-matris A

Vi utför följande steg

steg 1 Bestäm egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ till A

dvs lös $\det(A - \lambda I) = q(\lambda) = 0$

steg 2 Bestäm motsvarande egenvektorer

dvs lös homogena ekv.

$$(A - \lambda_k I)\vec{f}_k = \vec{0}, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

steg 3 bilda övergångmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \cdots & \vec{f}_n \end{pmatrix}$$

Kolla om $\det(P) \neq 0$

steg 4 skriv

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>EXA</u>. Avgör om $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras!

<u>Lösning</u>. A kan diagonaliseras om A har 3 linjärt oberoende egenvektorer (ty A är en (3x3)-matris)

<u>steg 1</u> Finn egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots\ldots (\text{kolla}) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

<u>steg 2</u> <u>Finn motsvarande egenvektorer</u>

$\lambda_1 = 0$, $\quad (A - 0I)\vec{u}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{u} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow (-1) \quad R_{1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow (-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{+2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 & \Rightarrow z = 2y \\ x - y = 0 & \Rightarrow x = y \end{cases}$$

med $y = t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{f}_1}$

<u>DElsvar</u> till $\lambda_1 = 0$ svarar $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Finn egenvektor som svarar mot $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$</u>

$$(A - 2I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -1 & -1 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ 2 & -2 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x - y - z = 0$$

plan som går genom origo.

I ett plan finns alltid 2 linj.ob vektorer. Vi måste parametrisera planet. Ter sätt $z = t$, $y = s$

$\Rightarrow x = s + t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{f}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{f}_2}$$

Delsvar till $\lambda_1=\lambda_3=2$ svarar

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Steg 3 övergång matrisen

$$P = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ \uparrow \vec{f}_1 \quad \uparrow \vec{f}_2 \quad \uparrow \vec{f}_3 \end{array}, \quad \text{lätt } \det(P) \neq 0$$

Steg 4 svar

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ givet $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ och $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$A = PDP^{-1}$$

Om $A = A^t$ (symmetrisk matris) så har A n linjärt oberoende egenvektorer och övergång matrisen P är en ON-matris dvs $P^t P = P P^t = I$

$\iff P^{-1} = P^t$

Ex B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finn en ON-övergång matris P : $P^t A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Lösning ① $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ och $\left((1-\lambda)^2 = 1\right)$

$1 - \lambda = \pm 1 \implies \begin{cases} 1-\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0 \\ 1-\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$

Delsvar. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

② sök egenvektor till $\lambda_1 = 0$

$$(A - 0I)\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y = z = t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}, \quad \vec{f}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② sök egenvektor $\vec{f}_2$: $\vec{f}_2 \perp \vec{f}_1$, $|\vec{f}_2| = 1$ till $\lambda_2 = 1$.

$$(A - 1I)\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases}$$

Väljer $x = 1$

Delsr $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{f}_2$

obs $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$

③ sök egenvektor $\vec{f}_3$: $\vec{f}_3 \perp \vec{f}_2 \perp \vec{f}_1$, $|\vec{f}_3| = 1$ till $\lambda_3 = 2$.

$$(A - 2I)\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ -y - z = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow z = -y = -t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = t u_3, \quad \vec{f}_3 = \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 \cdot 1 + (1)(-1)\right) = 0$$

$$\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_3 = 0$$

SVAR

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Om $A = A^t$ så bildar egenvektorer till A dvs $A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k,\ k = 1, 2, \dots, n$ en ortogonal bas

dvs $\vec{f}_j \cdot \vec{f}_k = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \|\vec{f}_k\|^2, & j = k \end{cases}$

Förklaring

Om $A = A^t$ (symmetrisk)

så gäller $\boxed{(A\vec{f}_k) \cdot \vec{f}_j = \vec{f}_k \cdot (A\vec{f}_j)}$

ty $\boxed{\vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = (\vec{f}_k)^t \vec{f}_j}$ (*)

$(A\vec{f}_k) \cdot \vec{f}_j = [(*)] = \underbrace{(A\vec{f}_k)^t}_{\vec{f}_k^t A^t} \vec{f}_j = \vec{f}_k^t \underbrace{A^t}_{A} \vec{f}_j$

$= \vec{f}_k^t A \vec{f}_j = \vec{f}_k \cdot A\vec{f}_j.$

VET ATT $A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $A\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$

där $\lambda_k \neq \lambda_j$

Vi har $\underbrace{(A\vec{f}_k)}_{\lambda_k \vec{f}_k} \cdot \vec{f}_j = \vec{f}_k \cdot \underbrace{(A\vec{f}_j)}_{\lambda_j \vec{f}_j}$

$\Rightarrow \lambda_k \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_k - \lambda_j)}_{\neq 0} \underbrace{\vec{f}_k \cdot \vec{f}_j} = 0$

$\Rightarrow \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = 0$

$\Rightarrow \vec{f}_k \perp \vec{f}_j$

Title: nov 30-10:47 (8 of 8)