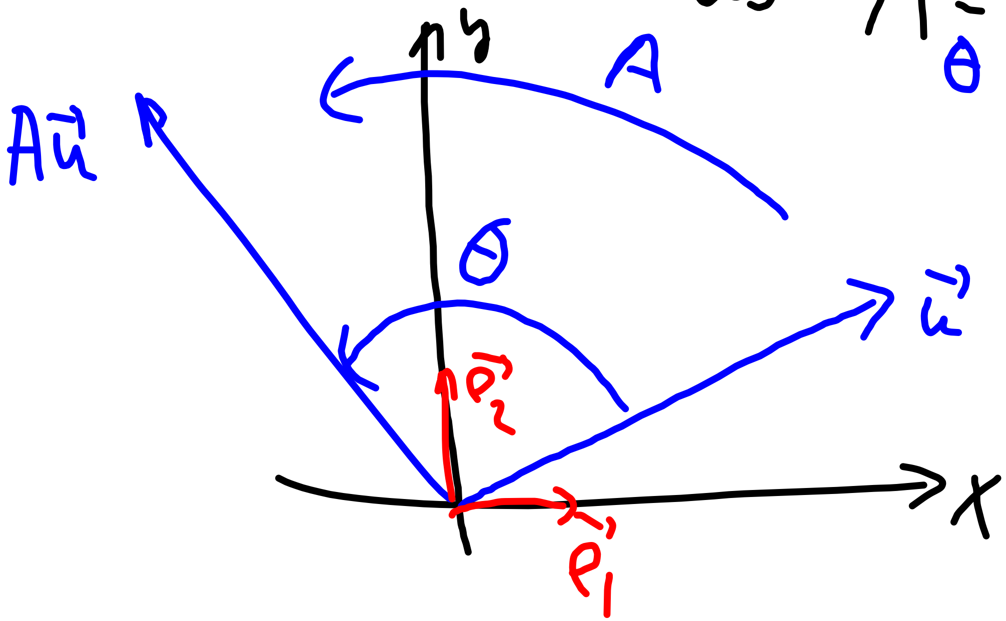
Förl 13: Egenvärdesproblem II

Rep $\vec{u} \neq \vec{0}$ säges vara egenvektor till en $(n \times n)$-matris A om $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

λ: tillhörande egenvärde

Ex1 Rotationsmatris $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



för $\theta \neq \pi$
$\theta \neq 2\pi$
$A_\theta \vec{u} \nparallel \vec{u}$

Problem Givet en $(n\times n)$-matris A_e i standard ON-basen $e = E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Finn en ny bas (behöver vara en ON-bas)
$f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ så att i denna bas f blir vår matris $A_f = D_f$ = diagonalmatris =

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

SVAR Den sökta basen $f = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ är en bas av egenvektorer till A
dvs $A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$

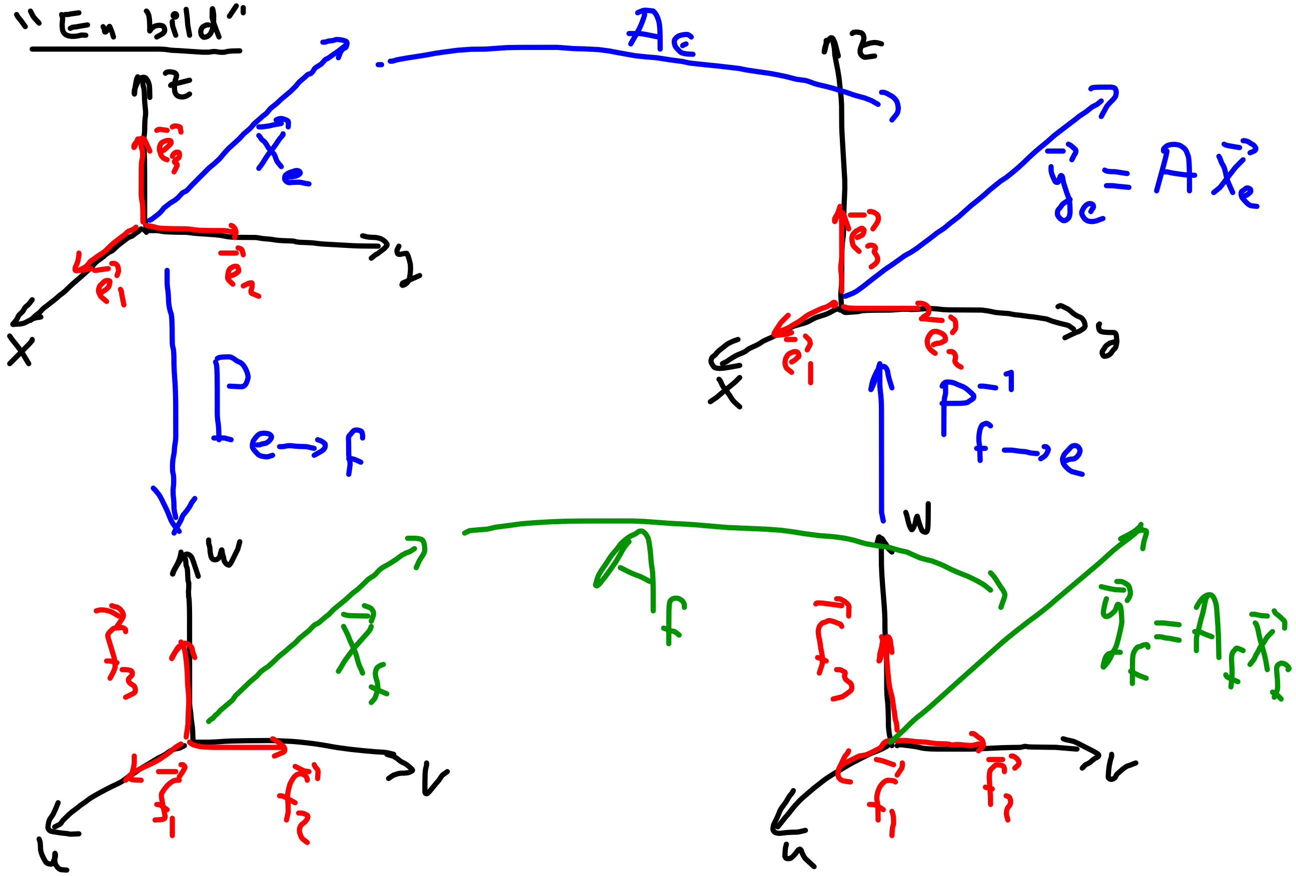
$$D_f = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Man skriver

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \cdots & \vec{f}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \text{matris}$$

$\det(P) \neq 0 \iff P^{-1}$ finns $\iff$ $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ linj. ober.

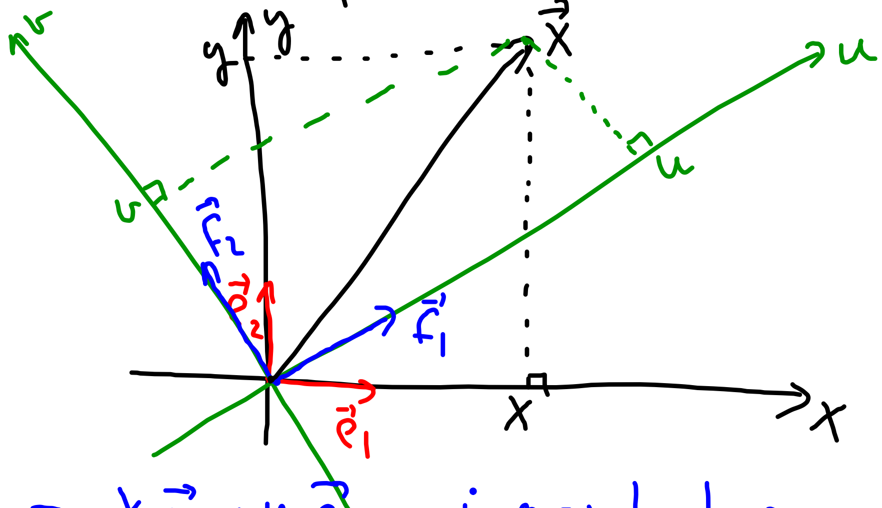
"En bild"



$$\boxed{\begin{aligned} A_e &= P A_f P^{-1} \\ D_f = A_f &\doteq P^{-1} A_e P \end{aligned}}$$

ATT Förstå basbyte — Byte av koordinater

Vill förstå vad gör P och vad den kommer ifrån.



$x = \vec{X}_e = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ i gamla basen e

$x = \vec{X}_f = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2$ i nya basen f

med givet sambandet mellan baserna

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{cases}$$

Vi söker sambandet mellan gamla koord. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och nya koord $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\vec{X} = \vec{X}_e = \vec{X}_f$: $\iff x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2$

[använd sambandet mellan gamla basen e och nya basen f]

$$\therefore \; x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = u\left(c_{11}\vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_2\right) + v\left(c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2\right)$$

$$= \left(uc_{11} + vc_{21}\right)\vec{e}_1 + \left(uc_{12} + vc_{22}\right)\vec{e}_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = uc_{11} + vc_{21} \\ y = uc_{12} + vc_{22} \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{gamla kood}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}}_{\substack{\vec{f}_1 \;\; \vec{f}_2 \\ P}} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\text{nya kood}}$$

Sätt $\underline{P} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{2\times 2}$ -matris.

Resumé

$$\underbrace{\vec{X}_e}_{\text{gamla}} = P\underbrace{\vec{X}_f}_{\text{nya}} \iff \vec{X}_f = P^{-1}\vec{X}_e$$

- $\vec{X}_e = P\vec{X}_f$ (gamla koordinater beskrivna i de nya)
- $\vec{X}_f = P^{-1}\vec{X}_e$ (nya koordinater beskrivna i de gamla)

EX A i $\mathbb{R}^2$ väljs ett nytt koordinatsystem med basvektorer

$\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

① $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$. Finn koordinater till vektorn $\vec{x}$ i den nya basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$

② En rät linje har ekv $2x - y = 3$ i den gamla basen. Vad blir denna ekvation i den nya basen?

Lösning $\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ i gamla basen e

$\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ —— " ——

VET den matris P som flyttar basen e till basen f ges av

$$P = \begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

kol 1 kol 2

$$\det(P) = \begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix} = 9-8 = 1 \neq 0$$

Rep $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

Kolla alltid $PP^{-1} = I$

Sambandet mellan gamla koordinater till en vektor $\vec{x}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ och de nya $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ är

$$\underset{\text{gamla}}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} = P\underset{\text{nya}}{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 = -5\vec{f}_1 + 9\vec{f}_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow_{(*)} \begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 4u + 3v \end{cases}$$

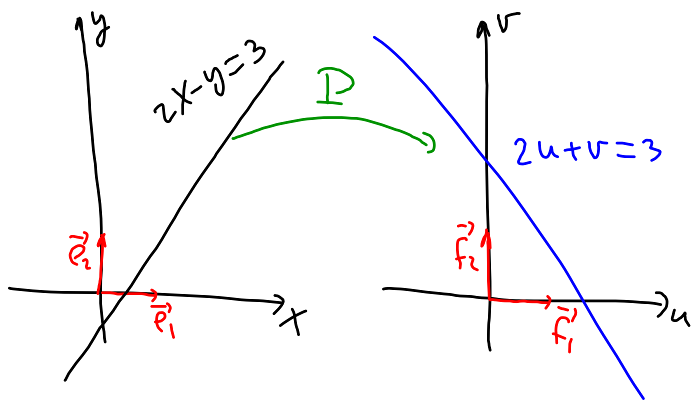
② Rät linje $2x - y = 3$ i gamla koordinater skall uttryckas i (u, v) nya koord.

$$2x - y = 3 \quad \left[\begin{array}{l} \text{Sätt in en list } (*) \\ x = 3u + 2v \\ y = 4u + 3v \end{array}\right] =$$

$$2(3u + 2v) - (4u + 3v) = 3$$

$$6u + 4v - 4u - 3v = 3$$

$$\underline{2u + v = 3}$$



EXB $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$

Hur ser ut $3x+7y-5z=6$ i den nya basen f.

Lösning Basbyte matrisen P ges av

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ \vdots & & \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{gamla}}{\vec{X}_e} = P \underset{\text{nya}}{\vec{X}_f} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = u+v+w \\ y = v+w \\ z = w \end{cases}$$ som skall sattasin i ekvationen för planet $3x+7y-5z=6$

$$\Rightarrow 3\underbrace{(u+v+w)}_{x} + 7\underbrace{(v+w)}_{y} - 5\underbrace{w}_{z} = 6$$

$$\Rightarrow 3u+3v+3w+7v+7w-5w=6$$

$$\Rightarrow \boxed{3u+10v+5w=6}$$

SVAR