FÖREL NR 12: Egenvärdesproblem: del I

EX 1 i $\mathbb{R}^3$ finns en sk standard bas

$$e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \iff \underbrace{\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3}_{} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

↑ koord till $\vec{x}$

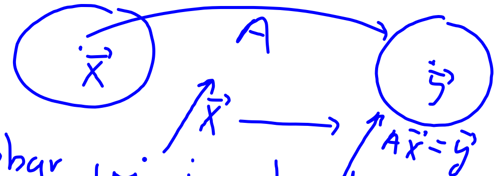
$\vec{x}$ = linj. komb. av $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ och $\vec{e}_3$

att ekv. syst $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

där (x_1, x_2, x_3) är obekanta

har exakt en lösning $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ = koord till $\vec{x}$

Avbildning $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$



Jobbar vi i standard bas

$e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ = ON-bas

Motsvarande matrisen A tecknas

A_e : $A_e\vec{x} = \vec{y}$ i basen e

Fråga 1. Finns det i $\mathbb{R}^3$ en annan bas $f = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} \iff \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$

är linj. ober $\iff x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + x_3\vec{f}_3 = \vec{0}$

$\Longrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Så att matrisen A i basen f

som vi tecknar $A_f = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = D =$

diagonalmatris

Ty Lex lättare $D^n = \underbrace{DDP\ldots D}_{n \text{ gånger}}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}_{n \text{ gånger}}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

Därför problem: finn en bas i $\mathbb{R}^3$ så att den givna matrisen A kan skrivas som en diagonalmatris

Vi söker en $(n \times n)$-matris C så att $(n \times n)$-matris A kan skrivas som en $(n \times n)$-diagonal matri D

Svar Sambandet mellan A, D och C ges av

$$D = C^{-1}AC \Leftrightarrow$$

$$CD = \underbrace{CC^{-1}}_{I}AC = AC$$

$$\Leftrightarrow \quad CDC^{-1} = A\underbrace{CC^{-1}}_{I}$$

$$\boxed{D = C^{-1}AC \Leftrightarrow A = CDC^{-1}}$$

Def 1 Vi säger att $(n \times n)$-matris A är $\boxed{\text{diagonaliserbar}}$ om vi kan finna en inverterbar $(n \times n)$-matris C : $C^{-1}AC = D$

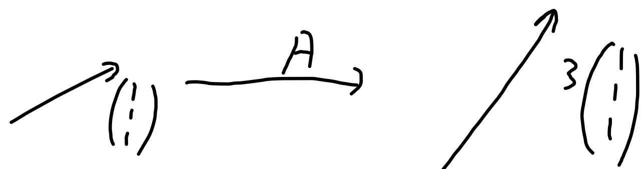
Man säger också att matrisen C $\boxed{\text{diagonalisera}}$ matrisen A

Def 2 Vektor $\boxed{\vec{u} \neq \vec{0}}$ som uppfyller ekv. $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, för ngt $\lambda \in \mathbb{R}$ säges vara en $\boxed{\text{EGENVEKTOR}}$ till A och TAlet $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$ tillhörande $\boxed{\text{egenvärde}}$

$$A\vec{u} \,//\, \vec{u} \iff A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

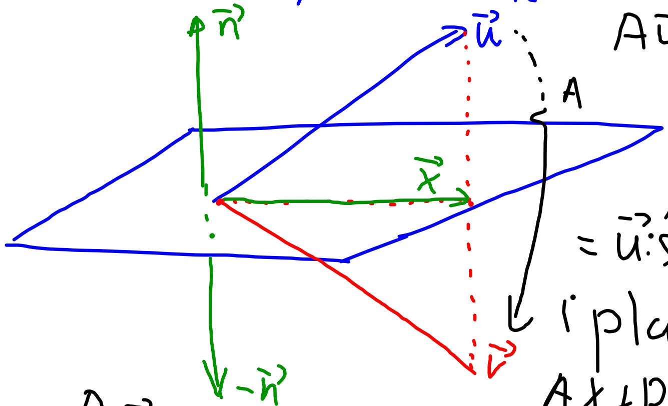
EX3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Egenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Tillhörande egenvärde = 3

EX4 Avbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$A\vec{u} = \vec{v}$

$= \vec{u}$:s spegelbild i planet $Ax+By+Cz=0$

$A\vec{n} = -\vec{n}$, $\vec{n}$ egenvektor med $\lambda = -1$ egenvärde

$A\vec{x} = \vec{x}$, $\vec{x}$ egenvektor med $\lambda = 1$ egenvärde

Problem. Hur gör man för att finna $\vec{u}$ och λ
då $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

Svar Vi söker vektorer $\vec{u} \neq \vec{0}$:

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \iff A\vec{u} = \lambda I\vec{u} \iff$$

$$A\vec{u} - \lambda I\vec{u} = \vec{0} \iff (A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$$

Detta är ett homogent ekv. system
som har icke-noll lösningar ($\vec{u} \neq \vec{0}$)
om $\det(A - \lambda I) = 0$
om $\det(A - \lambda I) \neq 0 \iff (A - \lambda I)^{-1}$ finns
och de enda lösning som vi får är $\vec{u} = \vec{0}$
som vi inte vill ha. därför måste

$$\det(A - \lambda I) = P(\lambda) = 0$$

(kallas sekulär (karakteristisk) polynom)

Lösningsmetod

För att finna $\vec{u} \neq \vec{0}$, då $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

1. Finn endast de reella λ som löser polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$
$\implies$ ger egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
2. Lös homogenekvationen
$(A - \lambda_k I)\vec{u}_k = \vec{0}$, $k = 1, 2, \dots, n$

<u>Huvudex</u> låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^t$,

A symmetrisk matris.

① Finn en bas av egenvektorer till A. Sedan Bilda den sökta matris $C = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

↑ ↑ egenvektorer till A

② Finn i den nya basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$, matris D : $D = C^{-1}AC$

③ Bestäm A^n.

Lösning steg 1 Finn egenvärden till A

Dessa fås ur polynomet $\det(A-\lambda I)=0$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

DELSVAR egenvärdena till A

är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

Title: nov 24-10:33 (8 of 11)

Steg 2 Finn motsvarade egenvektorer till $\lambda_1 = -1$ finns egenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ som löser den homogena ekv.

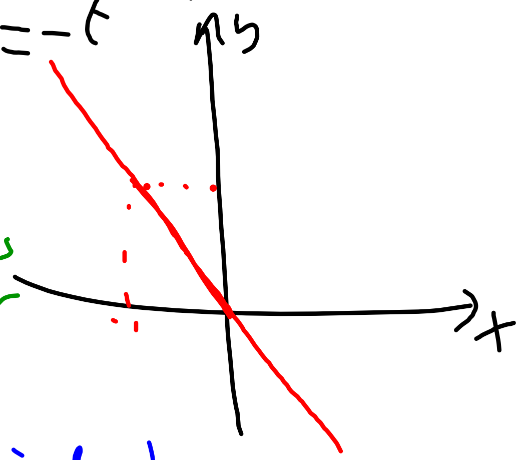
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x_1 + \cancel{2}x_2 = 0 \\ \cancel{2x_1 + 2x_2 = 0} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow x_1 = -x_2$ linjen som går genom origo skall parametriseras

t ex $x_2 = t \Rightarrow x_1 = -t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{riktningsvektor}}$$



Välj $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

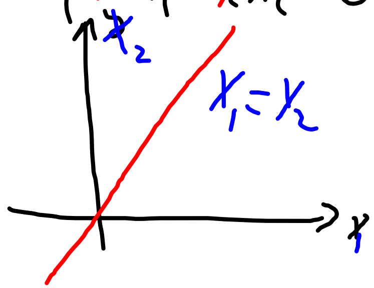
__delsvar__ till egenvärde $\lambda = -1$ svara egenvektor $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finn egenvektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ som svarar mot $\lambda_2 = 3$ $\iff$ Vi löser homogena ekvationen $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1\\3x_2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + x_2 = 3x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{-2x_1 + 2x_2 = 0} \\ \cancel{2}x_1 - \cancel{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_1 = x_2$$



på parameter form
t ex $x_2 = t \Rightarrow x_1 = t$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Riktningsvektor}}$$

Välj $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

<u>Delsvar</u>: till egenvärde $\lambda_2 = 3$ finns egenvektor $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Steg 3 Vi har funnit en bas av egenvektorer till matris A

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$