FöRL11 : Inversa - Isometriska avbildningar

$\boxed{\text{O}}$rto$\boxed{\text{N}}$ormerade Matriser

Rep

$$A\vec{x}=\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}=A^{-1}\vec{y}$$

A^{-1} finns $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ekv

$A\vec{x}=\vec{y}$ har exakt en lösning

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{y}$$

Hur man beräknar A^{-1} : Via Gauss' metod

$$AX=I \Leftrightarrow X=A^{-1}$$

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{operationer}]{\text{rad}} (I \mid \underbrace{X}_{A^{-1}})$$

Snabb metod att finna Inversen till (2×2)-matriser.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \quad \det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

<u>EX</u> $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1\end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

Kolla alltid!

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

OK!

ATT Jobba med Inversen (utan siffror)

EX2 A, B $(n\times n)$-matriser med Inverser A^{-1} och B^{-1}

Bestäm matrisen X som uppfyller

$$AXB = AB + A^2 \quad (1)$$

Lösning Vet $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$BB^{-1} = B^{-1}B = I$

steg 1 Multiplicera med A^{-1} från vänster (1)

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{I}XB}_{XB} = \underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{I}B}_{B} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{I}A}_{A}}_{A^{-1}AA}$$

$$\therefore XB = B + A \quad (2)$$

Multiplicera (2) med B^{-1} från höger

$$\underbrace{X\underbrace{BB^{-1}}_{I}}_{X} = \underbrace{BB^{-1}}_{I} + AB^{-1}$$

$$\therefore \boxed{X = I + AB^{-1}}$$

EX3 $(n\times n)$-matris A uppfyller

$$A^2+2A+I=0 \quad (1)$$

Visa att A^{-1} finns och bestäm denna.

Lösning (1) kan skrivas $\underbrace{A^2+2A}_{A(A+2I)}=-I$

$$(1) \iff A(A+2I)=-I \iff$$

$$\boxed{A(-A-2I)=I \quad (*)}$$

A^{-1} finns $\iff \det A \neq 0$

$$\det(A(A+2I)) = -\underbrace{\det I}_{=1} = -1$$

$$\underbrace{\det(A)}_{\text{TAL}} \cdot \underbrace{\det(A+2I)}_{\text{TAL}} = -1$$

$\implies \det(A)\neq 0$ och $\det(A+2I) \neq 0$

$$(*) \implies A^{-1} = -(A+2I)$$

$$\implies (A+2I)^{-1} = -A$$

Om ON-matriser

Rep $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ bildar ett ON-system

om $\vec{u}_k \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$

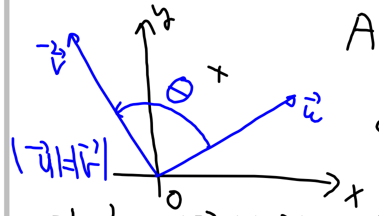
Ex $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

bildar ett ON-system i $\mathbb{R}^3$

Def 1 En $(n \times n)$-matris A säges vara en ON-matris om dess kolonner (rader) bildar ett ON-system.

dvs $$AA^t = A^tA = I \iff A^{-1} = A^t$$

Ex Rotationsmatris



$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Obs! (1) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ (samma vektor som vrids med vinkel θ)

(2) $|A\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{u}|$

(3) $\det(A) = 1$ (positiv riktning)

(4) $$AA^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} & \underbrace{\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}_{=0} \\ \underbrace{\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}_{=0} & \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} \end{pmatrix}$$

$$= I$$

(5) $$A^{-1} = A^t$$

(6) $$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

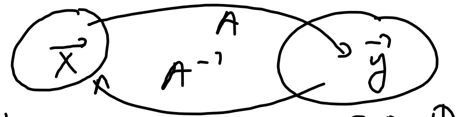
Kolonnerna i A

$$|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ bildar ett ON-system

Om Isometriska avbildningar



En linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ som beskrivs av matrisen A kallas för en <u>ISOMETRISK</u> Avbildning om den bevarar längd dvs

$$|A\vec{x}| = |\vec{x}|$$

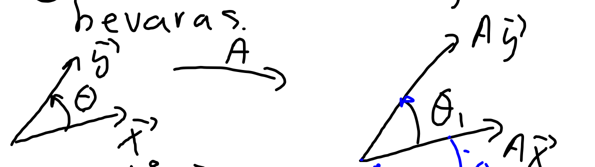
gäller för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Motsvarande matrisen som gör jobbet är en O.N. matris

<u>Obs!</u> ① $|A\vec{x}| = |\vec{x}|$ alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

② $(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

③ Vinkel mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$ bevaras.



då är $\Theta = \pm\theta_1$

Ty $(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = |A\vec{x}|\,|A\vec{y}| \cos\theta_1$ (1)

$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\theta$ (2)

Men $|A\vec{x}| = |\vec{x}|$, $|A\vec{y}| = |\vec{y}|$

(1) och (2) säger

$\cos(\theta) = \cos(\theta_1)$

$\Rightarrow \theta = \pm\theta_1$

Hur används ON-matris

Givet en $(n \times n)$ symmetrisk matris A dvs $A = A^t$

Finn en ON-matris C dvs $C^t C = C C^t = I$

: $C^t A C = D$ (Diagonal matris)

Detta är "nästan" hela kap 7 och 8

Rep EXA. För vilka värden på talet a

har systemet
$$\begin{cases} x + az = 1 \\ y + az = 3 \\ ax + ay + 2z = 5 \end{cases}$$

exakt en lösning

Lösning: 3 ekv 3 obekanta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Systemet har exakt en lösning om A^{-1} finns $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} - \underbrace{0 \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & a \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - a^2) + a(-1 \cdot a) = 2 - 2a^2$$

$$\det(A) = 2(1 - a^2) \neq 0 \text{ om } a^2 \neq 1$$

$$a \neq \pm 1$$

Title: nov 23-10:34 (9 of 11)

EXB. Undersök om $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kan skrivas som en linj. komb. av

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösning: Vi söker om möjligt x_1, x_2, x_3 och x_4:

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + x_4\vec{u}_4 = \vec{V} \quad (*)$$

$(*)$ har exakt en lösning.

Som kan skrivas

$$x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 & (2) \\ x_1 = 1 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & (3) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 & (4) \end{cases}$$

$x_1 = 1$ in i (2) $\Rightarrow x_2 = -1$ in (3)

$x_3 = -3x_1 - 2x_2 = -1$ (4)

in i (4): $x_4 = 1 - 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2$

$$\vec{V} = 1.\vec{u}_1 - 1.\vec{u}_2 - 1\vec{u}_3 + 2\vec{u}_4$$

$\Longleftrightarrow$ i basen $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$

har $\vec{V}$ koordinaterna $\left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right.$