Förl n°10 Fortsättning:

Linjärt beroende – oberoende.

Rep $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$

(1) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ säges vara linj. ober. i $\mathbb{R}^n$ om $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_k\vec{u}_k = \vec{0}$ $\Longrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ (0-lösning)

(2) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ säges vara linj. beroende i $\mathbb{R}^n$ om $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_k\vec{u}_k = \vec{0}$ har en icke-noll lösning dvs inte alla $x_1, x_2, \dots x_k$ är noll.

(3) om $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ och $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_k\vec{u}_k \quad *}$$

så säges att $\vec{v}$ är en linj. kombin. av $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ eller ekv. systemet (*) har exakt en lösning

Ex i Matlab $P_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

$P_3 = [c_0; c_1; c_2; c_3;]$

$\Longleftrightarrow$ $\{1, x, x^2, x^3\}$ är en bas : Rummet av alla polynom av grad 3.

<u>BRA EX i $\mathbb{R}^3$</u>. Avgör om $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3=\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}$ och $\vec{u}_4=\begin{pmatrix}7\\0\\-2\end{pmatrix}$ är <u>linjärt oberoende</u> i $\mathbb{R}^3$

<u>Lösning</u> "TÄNK"

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$

I rymden $\mathbb{R}^3$ behöver exakt 3 vektorer för att beskriva rummet $\mathbb{R}^3$. Vi har 4 vektorer. Dessa kan <u>inte vara linjärt oberoende</u>

$\therefore$ De måste vara <u>linjärt beroende</u>

Vi kollar om lösningarna till ekv. syst.

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + x_4\vec{u}_4 = \vec{0} \quad (*)$$

ger endast $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$$(*)\quad x_1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}7\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ -0x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 = 0 \\ 1x_1 + 5x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Eliminationsmetod

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right) (2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 8 & 3 & 0 \end{array}\right) (-13)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 3 & 0 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 & (1) \\ x_2 - x_3 = 0 & (2) \\ 7x_3 + x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

Ur (2) $\Rightarrow x_3 = x_2 = t$

(3) $\Rightarrow x_4 = -7x_3 = -7t$

(1) $\Rightarrow x_1 = -5x_2 - x_3 + 2x_4 = -20t$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-20\\1\\1\\-7\end{pmatrix}$$

systemet har parameterlösning

$\Longleftrightarrow$ ∞ många lösningar

$\Longleftrightarrow$ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ och $\vec{u}_4$ är

linjärt beroende

Rep $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Ex2 Låt $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots u_n$ vara parvis ortog.

dvs $\vec{u}_j \cdot \vec{u}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ |\vec{u}_j|^2, & j = k \end{cases}$

Undersök om $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ är linj. oberoende

Lösning Um $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{0}$

Vi måste visa att $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

$$\vec{u}_j \cdot (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots x_j\vec{u}_j + \dots x_n\vec{u}_n) = 0$$

$$x_1 \underbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_1}_{=0} + x_2 \underbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_2}_{=0} + \dots + x_j \underbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j}_{|\vec{u}_j|^2} + \dots + x_n \underbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_n}_{=0} = 0$$

$$= x_j \underbrace{|\vec{u}_j|^2}_{\neq 0} = 0 \rightarrow x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Geometriska sambandet mellan $\det(A)$ och kolonnerna i matrisen A.

Ex3 Låt $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{n \times n}$ matris

där $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ är dess kolonner.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ linj. ober $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \cdots & \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \cdots + x_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A^{-1}$ finns!!

Utgå från $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x} = \underbrace{A^{-1}\vec{0}}_{\vec{0}} \Longleftrightarrow \underbrace{I\vec{x}}_{\vec{x}} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{0}$$

$\therefore$ Kolonnerna är linj. ober.

Cramers regel: Mycket bra
Se kursbok § 55
ATT lösa via det(A) en kvadratisk system.

$A\vec{x} = \vec{b}$, där A nxn-matris

om $\det(A) \neq 0 \iff$ exakt en lösning

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^t$

$$\Rightarrow x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

där A_j är den matris som fås genom att i A ersätta kolonn j med vektor b

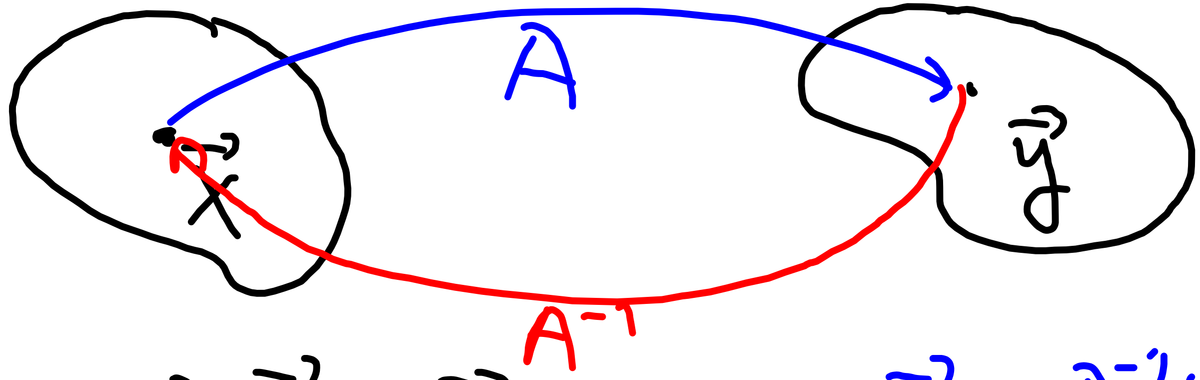
EX Lös
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -x + 7y = 8 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 4 = 25$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Inversa avbildningar: Rep



$$A\vec{x} = \vec{y} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

VET ATT A^{-1} finns

$$\iff \det(A) \neq 0$$

Hur finner man Inversen!

Ex Sök matrisen X : $AX = I$

Lösning

$$\left(A \mid I\right) \underset{\text{operationer}}{\overset{\text{rad}}{\sim}} \left(I \mid \underset{\nearrow A^{-1}}{X}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{op}}{\overset{\text{rad}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) (2)\,(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) (1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) (2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(I \mid A^{-1}\right)$$

Kolla om den funna A^{-1} är den sökta.

$$A A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Ok!