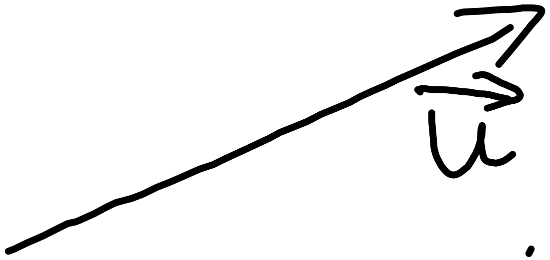
www.math.kth.se/~karim

<u>Förl 1</u> §1.1–1.3 Vektorer – Skalär produkt.

1. <u>Vektorer</u>



$\vec{u} = \mathbf{u}$

En sträcka med en given riktning och längd $|\vec{u}|$

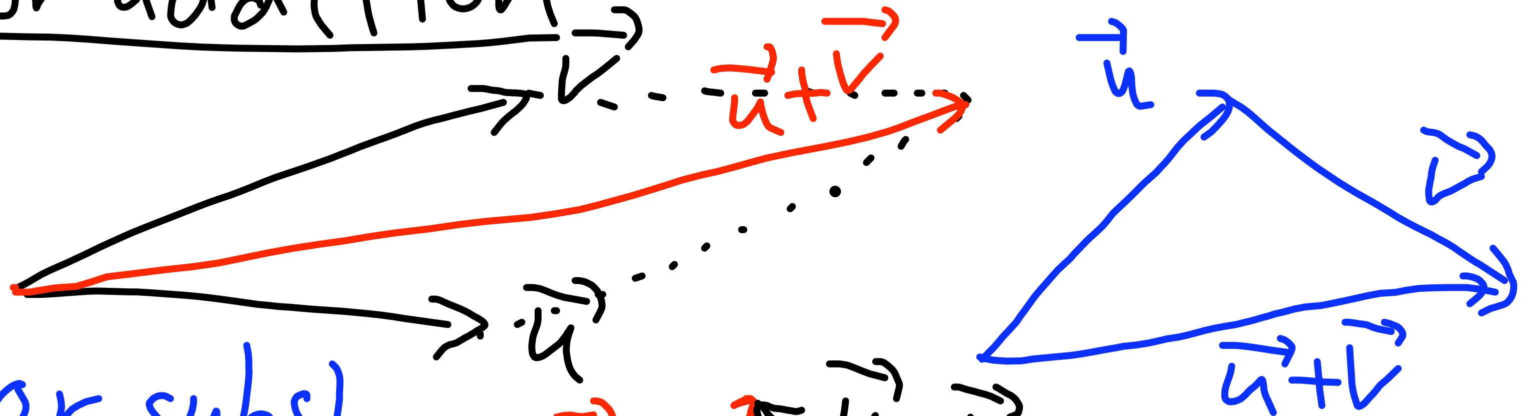
$|\vec{e}|=1$, enhetsvektor

Def 1, $\vec{u}$, med längd $|\vec{u}|$ kan normaliseras via $\vec{e} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

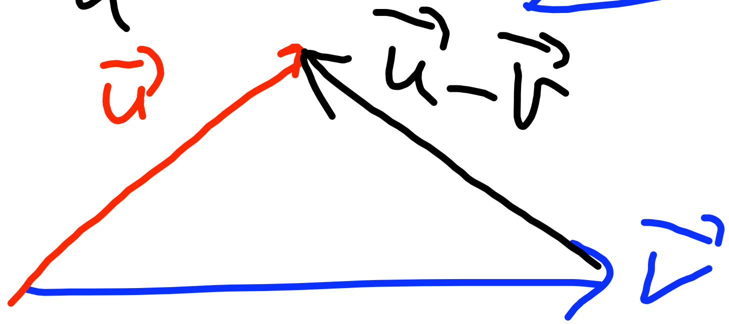
Obs! $|\vec{e}| = 1$

Def 2

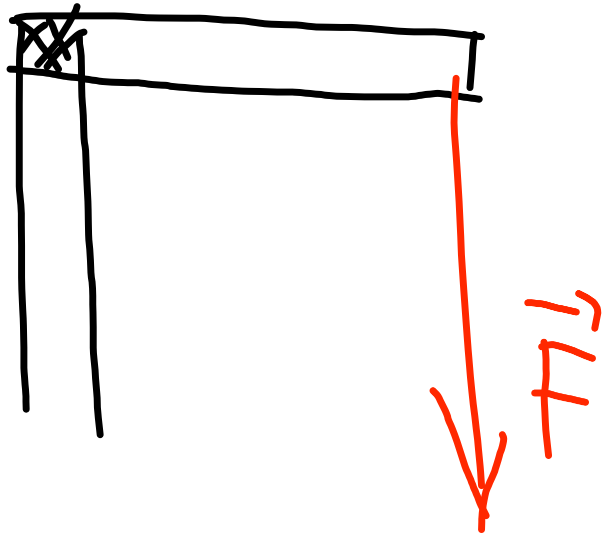
Vektor addition



Vektor subst.

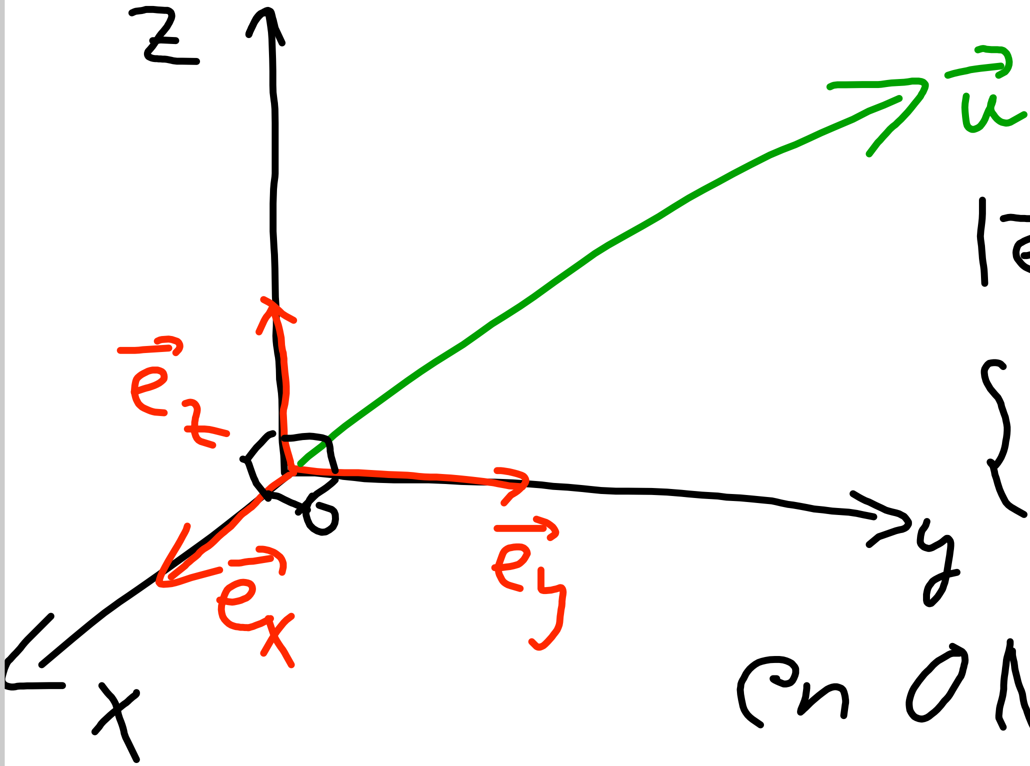


Tillämpning



Koordinater – koordinatsystem

$\mathbb{R}^3$ = rymden



$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z$

$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$

$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ bildar

en ON–bas (ortonormerade) i $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left[(x, y, z) \right]$$

koordinater

Längden $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq 0$

Addition

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ i ON-bas $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

$\vec{u}_1 \pm \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{pmatrix}$

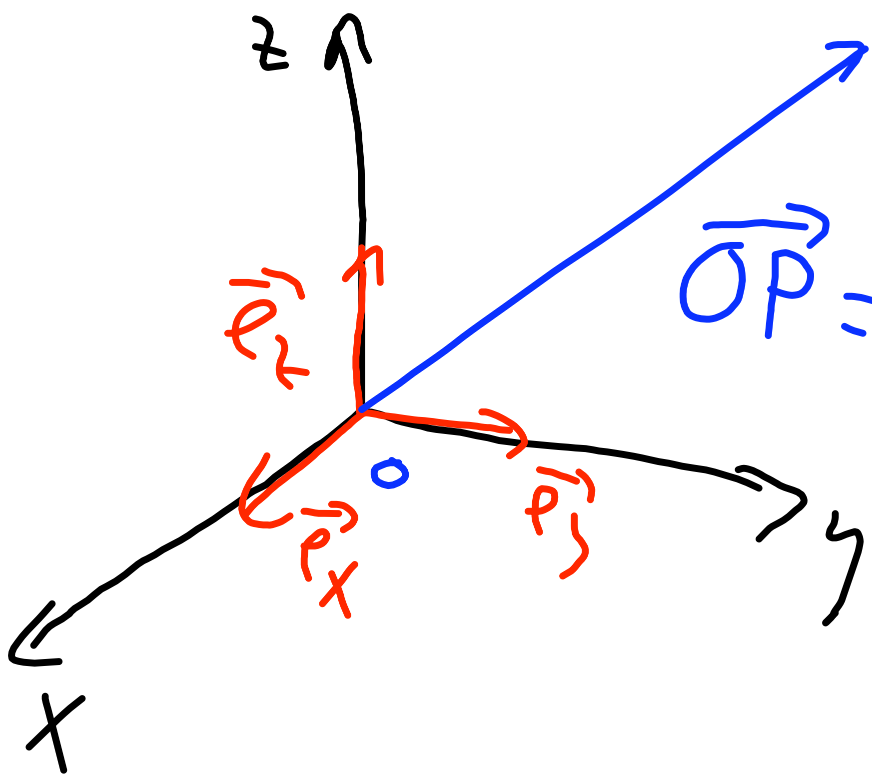
Multiplikation med en konstant

$\lambda \vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Avståndet mellan $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$

$$|\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = \sqrt{\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right)}$$

<u>ORTSvektorn</u>

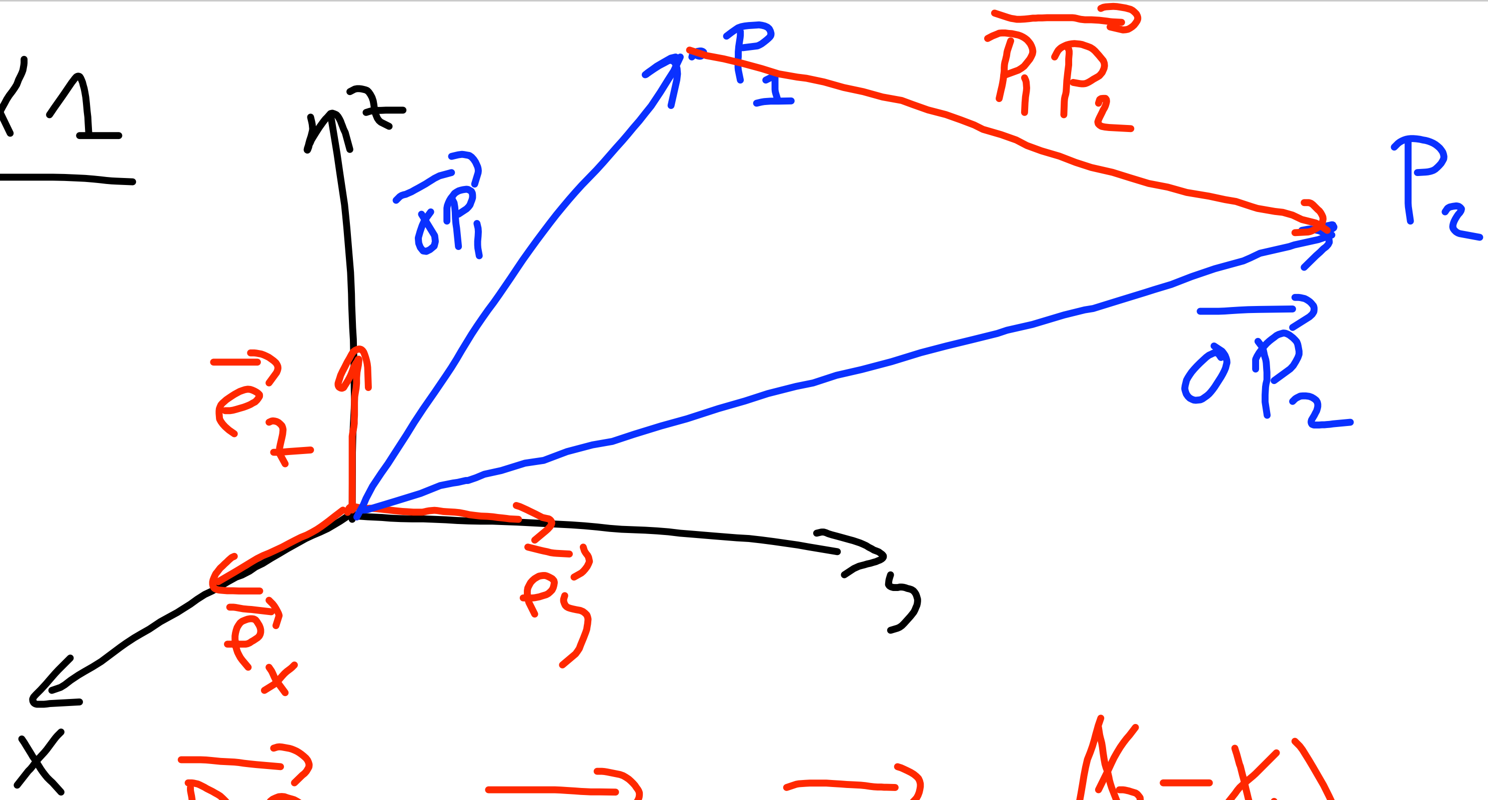


P : (x, y, z)

punkt i $\mathbb{R}^3$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{ORTSvektor!}$$

EX 1



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$\underline{\text{Ex 2}}$ Normalisera $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

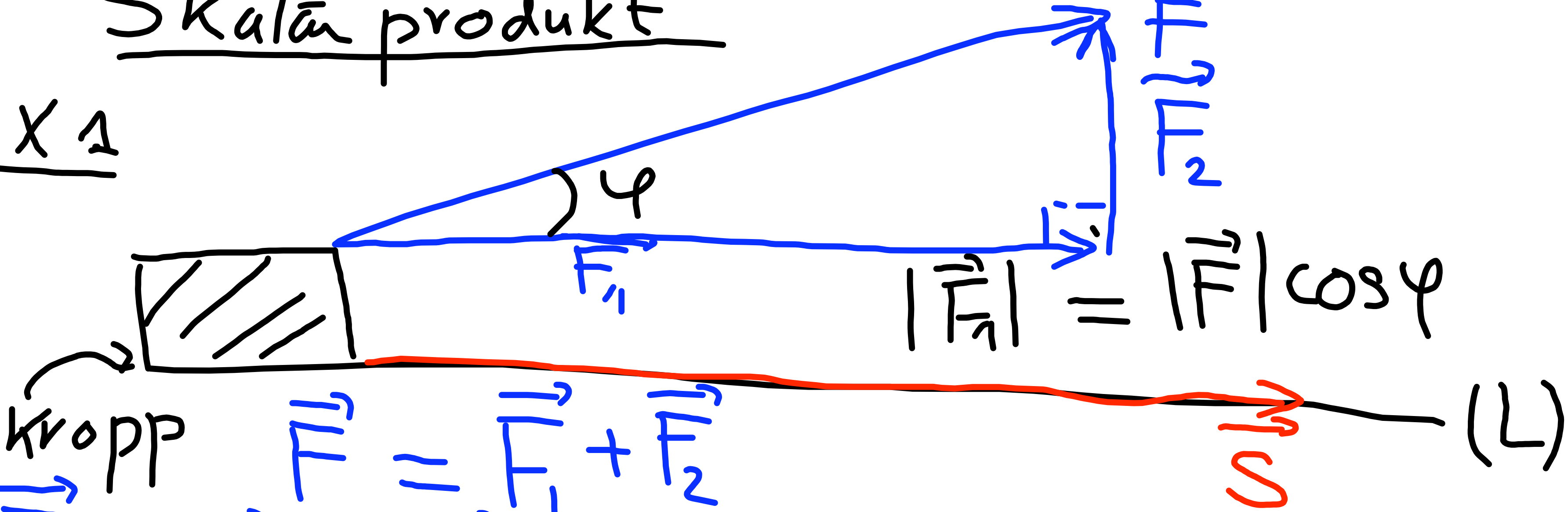
$\underline{\text{Lösning}}$: Att normalisera $\vec{v}$ menas att finna en enhetsvektor $\vec{e}$ som är parallell (//) med $\vec{v}$

$(\vec{e} \,//\, \vec{v})$: $\vec{e} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\vec{e} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\cancel{15}\,14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skalär produkt

EX 1



$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$$

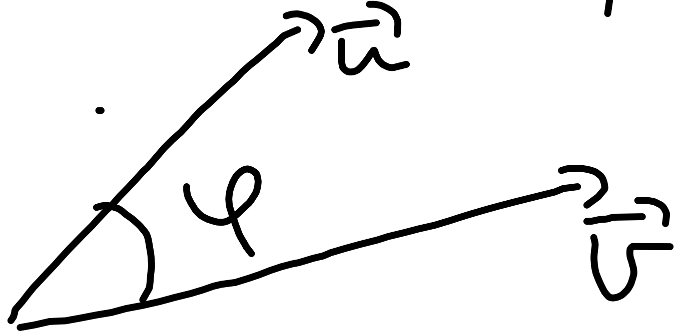
$\vec F_1 \parallel \vec S$, $\vec F_2 \perp \vec S$

ARBETET som utförs då $\vec F$ förflyttar kroppen sträckan $\vec S$ ges av

$$W = |\vec F_1|\,|\vec S| = |\vec F|\cos\varphi\,|\vec S| = \underbrace{|\vec F|\,|\vec S|\cos\varphi}$$

(skalär-produkten av $\vec F, \vec S$) $\rightarrow \vec F \bullet \vec S$ = TAL

Def av skalärprodukt mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$



Med skalärprodukt mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ menas TALET

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\varphi = \text{TAL}$$

$\neq$ vektor

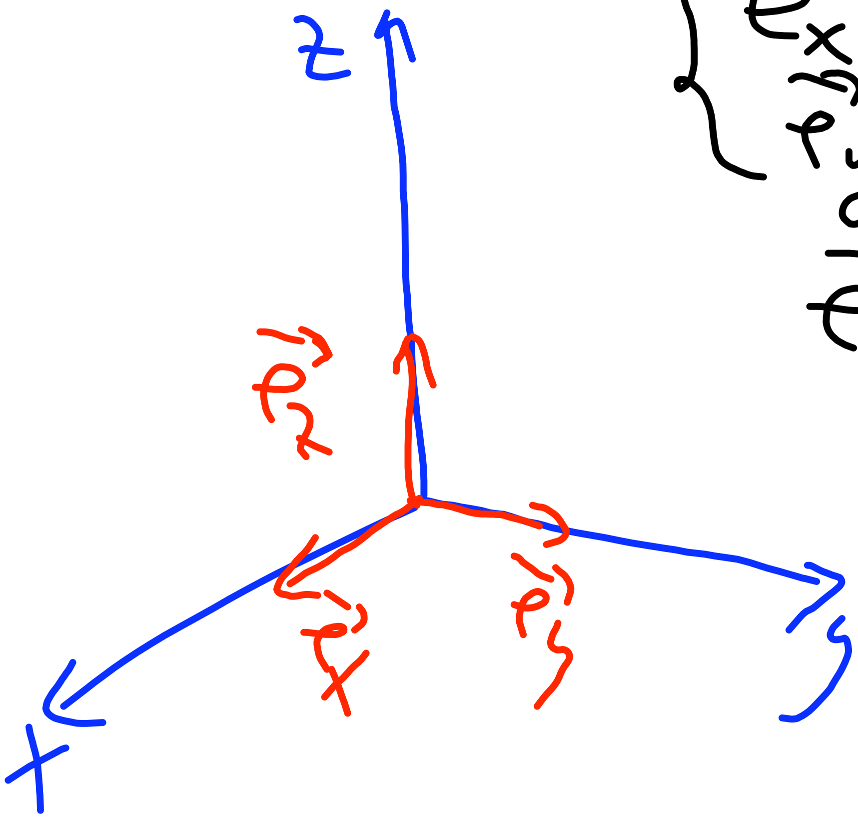
Obs!

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \Longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
2. $\varphi = \pi/2 \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
3. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

5. $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

6. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

Räkning i ON-bas $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$



$$\begin{cases} \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0, \quad \vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = 0 \\ \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0 \end{cases}$$

$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = 1, \quad \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1,$

$\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1$

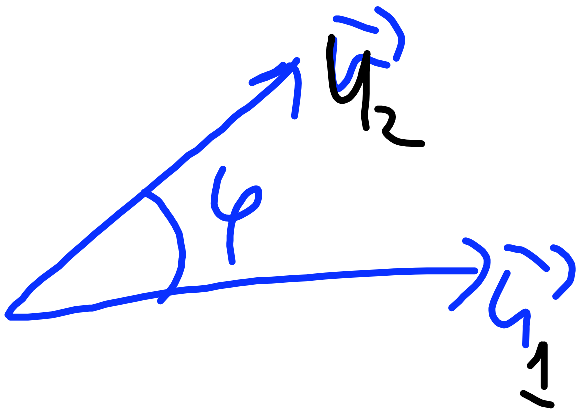
1) Om $\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad x = \vec{u}\cdot\vec{e}_x, \quad y = \vec{u}\cdot\vec{e}_y, \quad z = \vec{u}\cdot\vec{e}_z$$

2) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Sens moral



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 &= |\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|\cos\varphi \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{aligned}}$$

$\underline{\text{EX}}$ Finn vinkel mellan $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vinkeln ges av

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|} = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 = 6$$

$$|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2| = \Big(\underbrace{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}_{\sqrt{5}}\Big)\Big(\underbrace{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}_{\sqrt{9}=3}\Big) = 3\sqrt{5}$$

Ex $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Frågor (a) Vilka t är $\vec{u} \parallel \vec{v}$

(b) —— " —— $\vec{u} \perp \vec{v}$

Lösning $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = \lambda \vec{v}$, λ = konst

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 3\lambda & \Longrightarrow \lambda = 2/3 \\ t = 5\lambda & \Longrightarrow t = 5 \cdot \frac{2}{3} = 10/3 \end{cases}$$

Delsvar $\vec{u} \parallel \vec{v}$ om $t = 10/3$

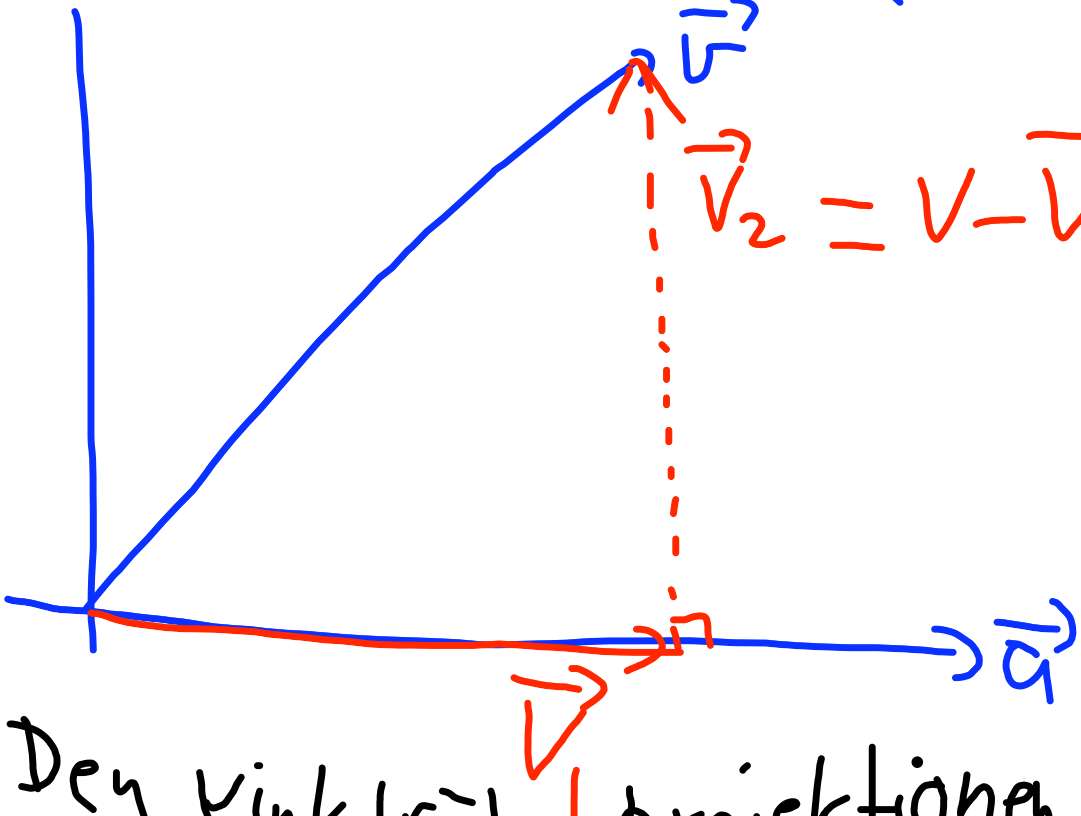
b) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + t \cdot 5 = 0$$

$$\implies t = -6/5$$

<u>Delsvar</u> $\vec{u} \perp \vec{v}$ om $t = -6/5$

Projektionssatsen (vinkelräta projektionen)



$\vec{v}_2 = v - \vec{v}_1$

Vi söker $\vec{v}_1$:

$\vec{v}_1 \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \lambda \vec{a}}$

Den vinkelräta projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{a}$ är vektor $\vec{v}_1 \parallel \vec{a}$ och som gör att $\vec{V}_2 = \vec{V} - \vec{V}_1 \perp \vec{a}$,

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}|^2}\right) \vec{a}$$