Lösningar till KS 3

Version A

1. $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \cdot \cos\theta$

Vi söker θ då $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

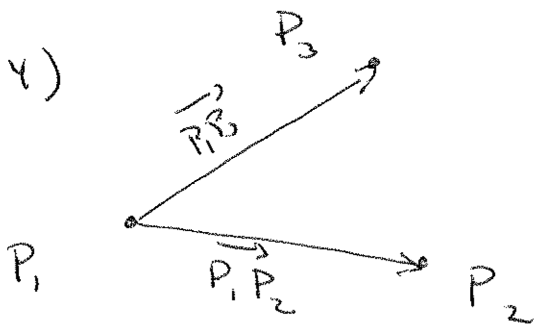
Vi ser att $\cos\theta = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$

så $\theta = \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

Svar: Vinkeln mellan vektorerna är $\dfrac{\pi}{3}$

2. Planet S innehåller $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (3,1,1)$

$P_3 = (1,2,4)$

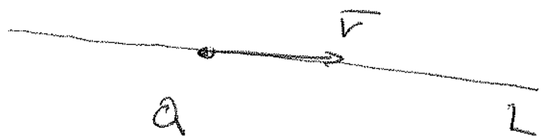


Vi söker den linje som passerar P_3 och är ortogonal mot S

Vi vet att en linje är bestämd av en punkt som den passerar samt en riktning.

Linjen $L(t) = Q + t \cdot \bar{v}$

där Q är en punkt på linjen och $\bar{v}$ en riktning



Här låter vi $Q = (1,2,4)$

$\bar{v}$ är ortogonal mot S. Vi kan låta $\bar{v}$ vara $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

så

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Svar</u>: $L(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Verison A

3) Vi kan skriva systemet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Systemet har precis en lösning om & endast om $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-14) - 3(-2) + (21+1) = -28 + 6 + 22 = 0$$

så systemet har antingen ingen eller oändligt många lösningar.

Eftersom systemet är homogent (högersidan $= 0$)

är $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ en lösning.

Svar: Systemet har oändligt många lösningar.

Version B

Svar:

1: $\theta = \frac{2\pi}{3}$

2: $L(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6t \\ 2+6t \\ 1-2t \end{pmatrix}$

3: Oändligt många lösningar.