# 5B1142 Lappskrivning 2, Version A
## Lösningar

(1) Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

---

**Lösning**

**Steg 1:** Partialbråksuppdelning

Ansats: $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

Högerledet förlängs för att få gemensam nämnare:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Alltså måste det gälla att $(A+B)x^2+(C-B)x+A-C=1$, dvs.

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ A-C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=B \\ A-C=1 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} B=-A \\ C=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow C=-A$$

$A-C=1$ innebär med $C=-A$ att $2A=1$, dvs. $A=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$

Steg 2: Primitiv funktion

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| \underbrace{- \frac{1}{4}\ln(x^2+1)}_{*} - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Termen $*$ finner vi genom en variabelsubstitution:

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x\,dx=dt \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

(Beloppstecknet behövs ej då $x^2+1$ är positiv.)

Svar: $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + C$.

(2) Ge exempel på

(a) en funktion $h(x)$ som är kontinuerlig för $x \geq 1$ sådan att $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, och $\int_1^\infty h(x)\,dx$ är divergent.

(b) en positiv funktion $g(x)$ sådan att $\int_1^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.

---

Lösning:

(a) Ett exempel är $h(x) = \frac{1}{x}$. För detta exempel är

$$\int_1^X h(x)\,dx = \int_1^X \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^X = \ln X \to \infty, \text{ då } X \to \infty.$$

Alltså är $\int_1^\infty h(x)\,dx$ divergent.

(b) Ett exempel är $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Då är

$$\int_1^X g(x)dx = \int_1^X \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^X = 1 - \frac{1}{X} \to 1, \text{ då } X \to \infty.$$

Alltså är $\int_1^\infty g(x)dx$ konvergent.

(3) Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le \sqrt{3x}\, e^{2x}$, $0 \le x \le 1$ får rotera kring x-axeln.

Lösning: Skivformeln (ekv. (2) s. 320) ger med

$f(x) = \sqrt{3x} \cdot e^{2x}$:

$$V = \int_0^1 \pi \cdot (f(x))^2 dx = 3\pi \int_0^1 x e^{4x} = \{\text{Part. Int.}\} =$$

$$= 3\pi \left( \left[ x \frac{e^{4x}}{4} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{4x}}{4} dx \right) = 3\pi \left( \frac{e^4}{4} - \left[ \frac{e^{4x}}{16} \right]_0^1 \right) =$$

$$= 3\pi \left( \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{9\pi e^4}{16} + \frac{3\pi}{16}.$$

Svar: Volymen är $\frac{9\pi e^4}{16} + \frac{3\pi}{16}$.