LAPPSKRIVNING 31/10 GUL LAPP

1\. a) $\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin\frac{1}{x} = \begin{bmatrix} t=\frac{1}{x} & x\to+\infty \\ & \Leftrightarrow \\ x=1/t & t\to 0^+ \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$

b) $f'(x) = 1\cdot\ln(1+x^2) + x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$

$f'(2) = \ln 5 + \frac{8}{5}.$

2\. $y'(x) = \frac{1}{1+(3x-2)^2}\cdot 3$

$y'(1) = \frac{3}{1+1^2} = 3/2$

Tangentlinjen är alltså på formen

$L(x) = \frac{3}{2}x + m$, m någon konstant.

$y(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

m bestäms därför av

$L(1) = \frac{3}{2}\cdot 1 + m = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow m = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$

Tangentlinjens ekvation är alltså

$L(x) = \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$

Gul forts

3. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$

Söker först extrempunkter:

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{1}{x-1} + e^{-1} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{e^{-x}}{(x-1)^2}\left(x-1+1\right) = -\frac{xe^{-x}}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$, $f(0) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ om } x < 0 \\ f'(x) < 0 \text{ om } 0 < x < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

0

lok. max!!

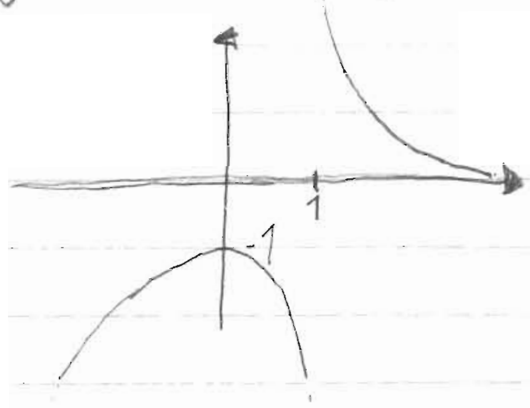
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ty e^{-x} växer snabbt

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ ty $x-1$ litet negativt då $x \to 1^-$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ ty $x-1$ litet positivt då $x \to 1^+$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ ty e^{-x} mkt liten då x stort.

Skiss:



$x = 1$ är en vertikal asymptot

$y = 0$ horisontell asymptot då $x \to +\infty$

Då $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{e^{-x}}{x^2} \to 0$ då $x \to -\infty$ saknas sned asymptot.

— * —

$\boxed{\text{LAPPSKRIVNING 31/10 GRÖN LAPP}}$

1. a) $\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \begin{bmatrix} t = 1/x & x\to 0^+ \\ x = 1/t & \Leftrightarrow\ t\to+\infty \end{bmatrix} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

b) $(x\cdot\ln(1+x^4))' = 1\cdot\ln(1+x^4) + x\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3$

$f'(-1) = \ln 2 + 2$

*

2. $y'(x) = \frac{1}{1+(\frac{x}{2}-1)^2}\cdot\frac{1}{2}$

$y'(4) = \frac{1}{4}$ så tangentlinjen är på formen

$L(x) = \frac{1}{4}x + m$, m någon konstant

Linjen ska passera $(4, y(4))$ och då

$y(4) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

ställs följande krav på m:

$L(4) = \frac{1}{4}\cdot 4 + m = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow m = \frac{\pi}{4} - 1$

Tangentlinjen ges alltså av

$L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4} - 1$

*

Grön forts

3. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

Söker först extrempunkter:

$$f'(x) = e^x \cdot \frac{1}{x+1} + e^x \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{(x+1)^2}(x+1-1)$$
$$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} -1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\}$$

lok. min!

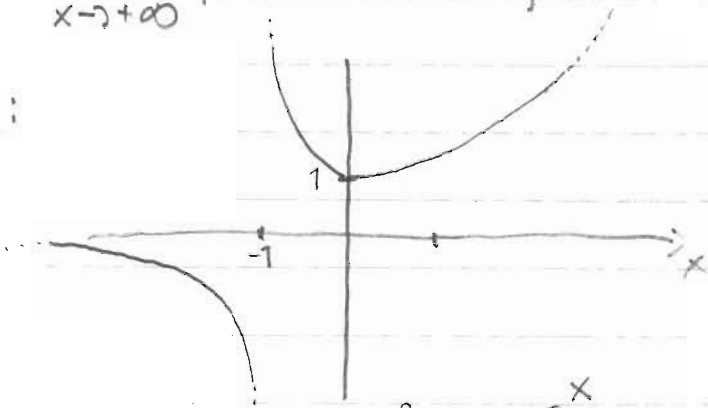
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ty $e^x \to 0$ snabbt då $x \to -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ ty $x+1$ litet negativt då $x \to -1^-$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ ty $x+1$ litet positivt då $x \to -1^+$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ty e^x växer snabbt då $x \to \infty$.

skiss:



$x = -1$ vert. asymptot.

$y = 0$ horisontell asymptot då $x \to -\infty$

Eftersom att $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{e^x}{x^2} \to +\infty$ då $x \to \infty$ saknas sned asymptot.