Egenskaper hos kontinuerliga funktioner

Ex: Visa att $f(x,y) = \sin(xy)$ är kontinuerlig.

Lösn: Vi ska visa att den är kontinuerlig i varje punkt (a,b), dvs för varje funktion $t \to (x(t), y(t))$ där $t \in [0,1)$ och $\lim_{t \to 1^-} (x(t), y(t)) = (a,b)$ gäller att $\lim_{t \to 1^-} f(x(t), y(t)) = f(a,b)$.

Vi antar $(x(t), y(t)) \in D_f \setminus \{(a,b)\}$ för $t \in [0,1)$.

$$\lim_{t\to 1^-} \sin(x(t)y(t)) = \sin\left(\lim_{t\to 1^-} x(t)y(t)\right) =$$

för sin kontinuerlig en variabelfunktion

$= \sin(ab)$, vilket var det vi ville visa.

Sats: Alla elementära uttryck är kontinuerliga i sina definitionsområden.

Ex/Övn: Visa att funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är kontinuerlig.

Lösn: Enligt satsen är $\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ kontinuerlig utanför origo. Det återstår att visa att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Vi ska alltså visa att

$$\lim_{t \to r} \frac{\sin\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)}{x(t)^2 + y(t)^2} = 1$$

då $t \to (x(t), y(t))$ är en funktion sådan att $\lim_{t \to r} (x(t), y(t)) = (0,0)$.

Vi substituerar $s = x(t)^2 + y(t)^2$ vilket ger

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sin s}{s} = 1.$$

Sats: Om f är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definierad på en kompakt mängd så gäller

i) att f antar ett största och minsta värde

ii) att om D_f är sammanhängande så antar f alla mellanliggande värden.

Följdsats: Om f är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definierad på en kompakt mängd så gäller

i) att V_f är kompakt

ii) Om D_f sammanhängande så är V_f sammanhängande.

Som exempel betrakta funktionen $f(\vec{x}) = \dfrac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|}$

där A är en linjär avbildning.

$$f(t\vec{x}) = \frac{|A(t\vec{x})|}{|t\vec{x}|} = \frac{|tA\vec{x}|}{|t\vec{x}|} = f(\vec{x})$$

Vi kan därmed betrakta f som definierad på enhetssfären. Men enhetssfären är kompakt så f antar ett största värde.

Def: Låt A vara en linjär avbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ då kallar vi uttrycket

$$\|A\| = \max_{\vec{x}} \frac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|} = \max_{\substack{\vec{x} \\ |\vec{x}|=1}} |A\vec{x}|$$

för A's norm. (matrisnorm)

Ex/Öv: Bestäm matrisnormen då $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är spegling i x-axeln $\|A\|=1$ resp töjning i y-led med en faktor 2. $\|A\|=2$

- A spegling i x-axeln

avbildningsmatrisen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

så $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|$

vilket ger $\|A\| = 1$.

- A töjning i y-led med en faktor 2.

Avbildningsmatris: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vi får $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2+4y^2}$

och $\max \dfrac{\sqrt{x^2+4y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$ så $\|A\| = 2$.

Differentierbara funktioner

en variabel:

differentierbar = deriverbar

$$f(x+h) = f(x) + \overset{f'(x)}{A}h + R(x,h)h$$

där $\lim\limits_{h \to 0} R(x,h) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A + R(x,h)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

existerar

flera variabler: <u>differentierbar</u>

$\vec{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar

i punkten $\vec{x}$ om ($D_f \supseteq$ omg till $\vec{x}$)

(*) och $$\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \mathbb{A}\vec{h} + \vec{\mathbb{R}}(\vec{x},\vec{h})\,|\vec{h}|$$

där $\mathbb{A}$ är en $m \times n$ matris som

inte beror av $\vec{h}$ och $\vec{R}$ är

en funktion sådan att $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \vec{R}(\vec{x},\vec{h}) = \vec{0}$.

Ex $(n=1)$: $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$; $(*)$ blir

då

$$\begin{pmatrix} x_1(t+h) \\ \vdots \\ x_n(t+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} R_1(t,h) \\ \vdots \\ R_n(t,h) \end{pmatrix} |h|$$

eller

$$\begin{pmatrix} x_1(t+h) \\ \vdots \\ x_n(t+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + a_1 h + R_1(t,h)|h| \\ \vdots \\ x_n(t) + a_n h + R_n(t,h)|h| \end{pmatrix}$$

Så

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \vec{f}'(t)$$

vilket ger

$$\vec{f}(t+h) = \vec{f}(t) + \vec{f}'(t)h + \vec{R}(t,h)|h|$$

Ex $(m=1)$ $(*)$ blir då

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + $$
$$+ (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + R(\vec{x}, \vec{h})|\vec{h}|$$

För att bestämma $a_1, \ldots, a_n$ sätter vi alla h_i till noll utom ett.

Tex: $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ger

$$f(x_1 + h_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + a_1 h_1 + R(\vec{x}, \vec{h})|\vec{h}|$$

så a_1 är derivatan av f då vi håller resten av variablerna fixa, partial derivata map x_1. $a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})$

så i det här fallet blir

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) \right),$$

som brukar kallas gradienten till f och betecknas grad f eller ∇f. Vi har alltså

$$f(\vec{x}^0 + \vec{h}) = f(\vec{x}^0) + \text{grad} f(\vec{x}^0) \cdot \vec{h} + R(\vec{x}^0, \vec{h})|\vec{h}|$$

Ex: Bestäm $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ då $f(x,y,z) = x^2 y z^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y 3 z^2$$

Ex: Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,-1)$ di

$$f(x,y,z) = xyz + \sin\left(\frac{yz}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz + \cos\left(\frac{yz}{x}\right)\left(-\frac{yz}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,-1) = 0 + 0 = 0$$