Låt $t \to \vec{r}(t)$ vara en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$ så definierar vi dess derivata som

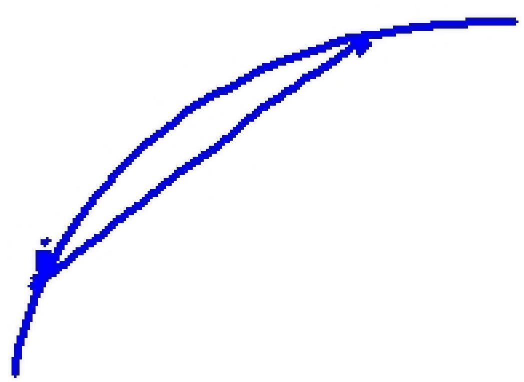
$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

om gränsvärdet existerar och är egentligt. Derivatan kan då beräknas komponentvis.

Ex: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

En kurva parametriserad av en deriverbar funktion $\vec{r}(t)$ kallas en deriverbar kurva.

<u>Längden</u>: $\displaystyle\int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt$



$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\right)\Delta t$$

Ex/övn: Låt $\vec{r}(t) = (1,0,2) + t(1,1,0)$ och beräkna längden av linjestycket mellan punkterna $(1,0,2)$ och $(3,2,2)$.

$t=0$ $t=2$

$$\int_0^2 |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^2 |(1,1,0)|\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Om $\vec{r}(t)$ är en deriverbar kurva så ger $\vec{r}\,'(t)$ en tangentvektor.

__Def:__ En mängd kallas för sammanhängande om varje par av punkter kan förbindas med hjälp av en kurva som ligger i mängden.

Ex:

Ex/Övn: Vilka av följande mängder är sammanhängande?

Nej a) $\{(x,y)\,;\ x^2-y^2=3\}$

hyperbel

Ja b) $\{(x,y,z)\,;\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 3\}$

Ja c) $\mathbb{R}^n$

Nej d) $\mathbb{Z}$

Funktioner av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har gränsvärde A när $\vec{x} \to \vec{a}$ om det gäller för varje kurva $\vec{x}(t)$ med $\lim_{t \to c} \vec{x}(t) = \vec{a}$ att

$$\lim_{t \to c} f(\vec{x}(t)) = A.$$

Def: En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sägs vara kontinuerlig i en punkt $\vec{a}$

om $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

Def: För funktioner av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan man definiera gränsvärden genom

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \underbrace{\left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{A} \right|}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} = 0$$

Ex: Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

existerar eller ej.

$x=0$: $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$

$\Rightarrow$ existerar ej

$y=0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$y=kx$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$

Ex/Övn: Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

existerar eller ej

$x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$y=0$ $\quad \lim_{x\to 0} 0 = 0$

$y=kx$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x\,kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2} \neq 0$ om $k \neq 0$

$\Rightarrow$ existerar ej

OBS! att $\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 0$

och $\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = 0$

men $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ existerar ej.

Om vi däremot vet att alla gränsvärdena existerar så är de lika.

Ex: Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2-xy}$$

existerar.

Om $y=kx$ har vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(kx)^3}{x^2+(kx)^2-xkx} = 0$$

så kanske existerar gränsvärdet.

Vi inför polära koordinater

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Så

$$\frac{y^3}{x^2+y^2-xy} = \frac{r^3\sin^3\varphi}{r^2 - r^2\cos\varphi\sin\varphi}$$

$$= r\,\frac{\sin^3\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi}$$

$$\leq 2$$

dvs

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2-xy}\right| \leq 2(x^2+y^2)$$

Så gränsvärdet blir 0.

Vad är det som gör en kurva eller yta snäll?

Krav för godkänt:

att ert kriterium täcker cirklar och sfärer.