Andragradskurvor i planet

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(A, B, C inte alla noll)

Vi börjar med att anta att $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

— $A, C \neq 0$

Vi kvadratkompletterar

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + 2\frac{E}{C}y\right) + F = 0$$

$$\underbrace{A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2}_{\xi} + \underbrace{C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2}_{\eta} \underbrace{- \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} + F}_{G} = 0$$

$$A\xi^2 + C\eta^2 + G = 0$$

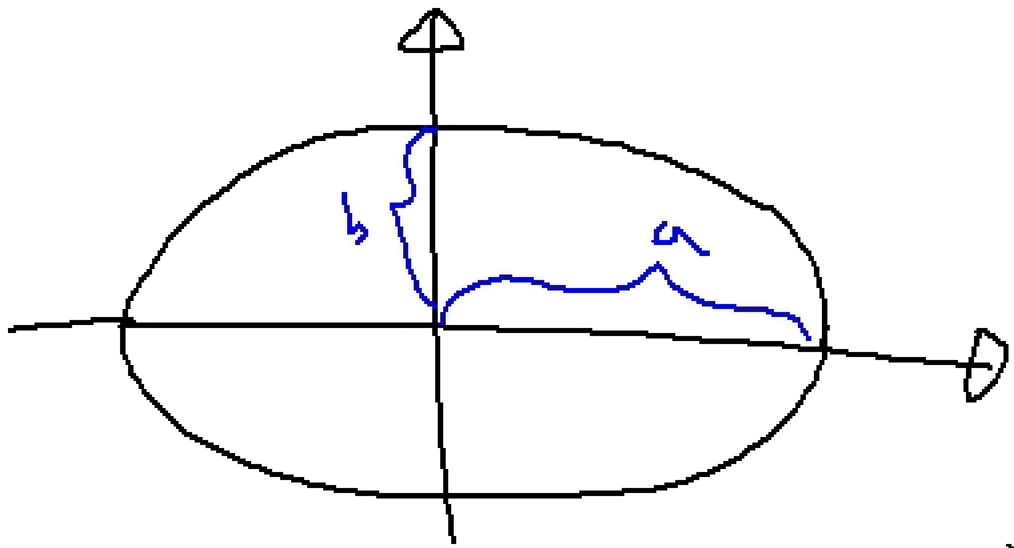
Om $A, C > 0$ och $G < 0$ blir det en ellips.

Om $A, C > 0$ och $G > 0$ finns det inga punkter som uppfyller ekvationen.

Om $A > 0$, $C < 0$ blir det en hyperbel.

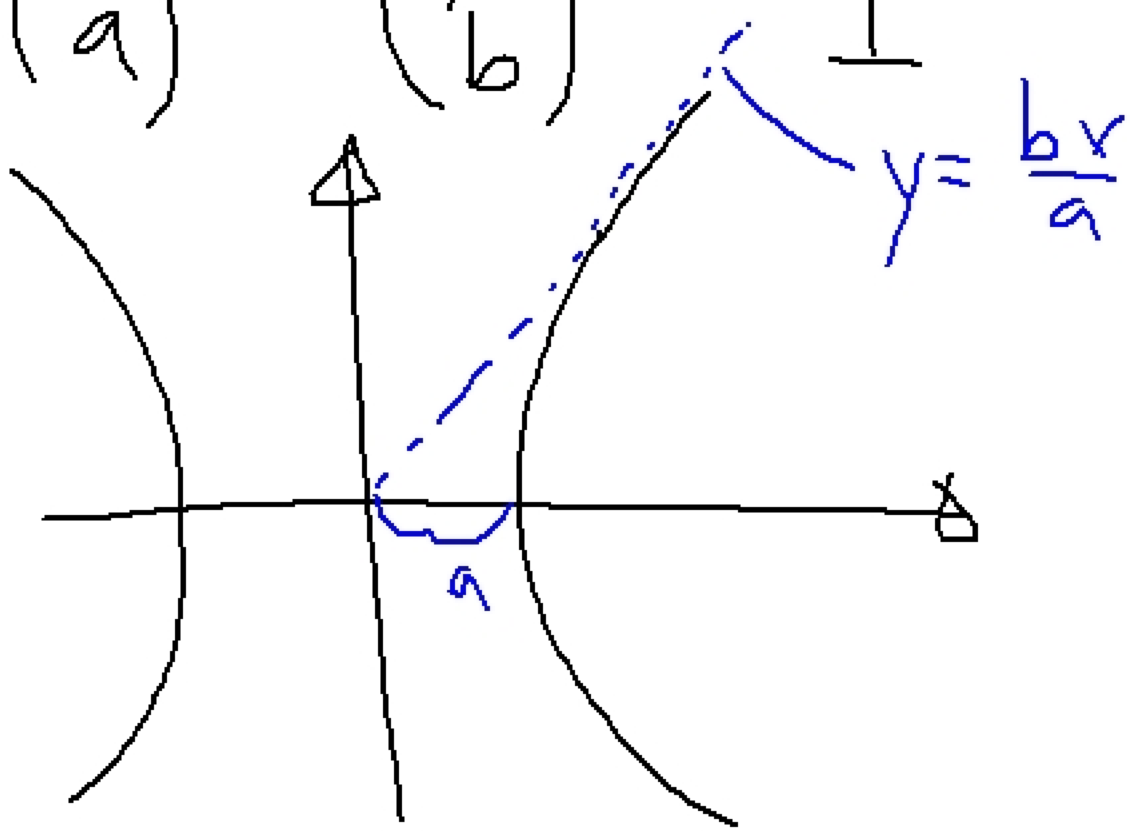
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ellips

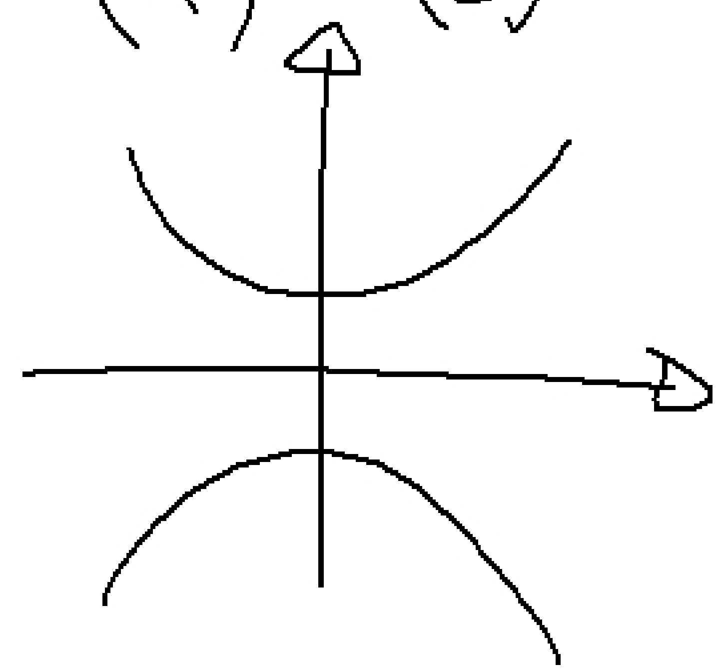


hyperbel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = -1$$

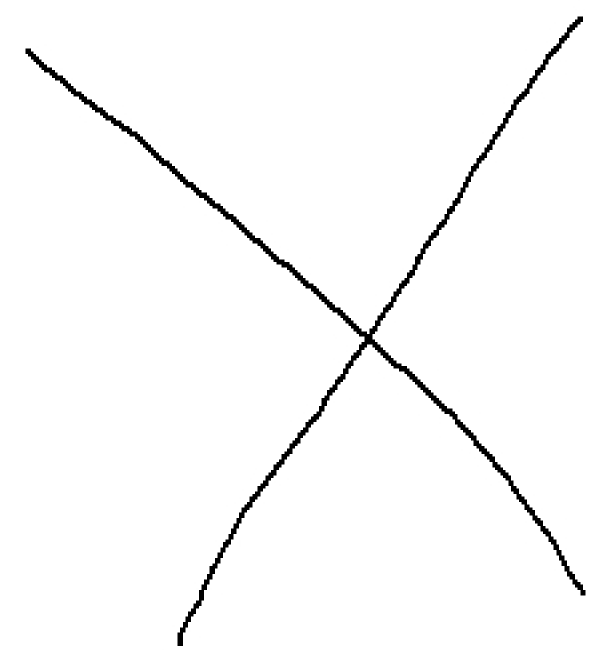


$$A\xi^2 + C\eta^2 = 0$$

Om A och C har samma tecken så är det bara $(\xi,\eta) = (0,0)$ som uppfyller ekvationen.

Om A och C har olika tecken

$$\underset{>0}{A}\,\xi^2 = \underset{>0}{(-C)}\,\eta^2$$



$$\Rightarrow \quad \xi = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}\;\eta$$

poäng! >0

$- \ A \neq 0, \ C = 0$

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

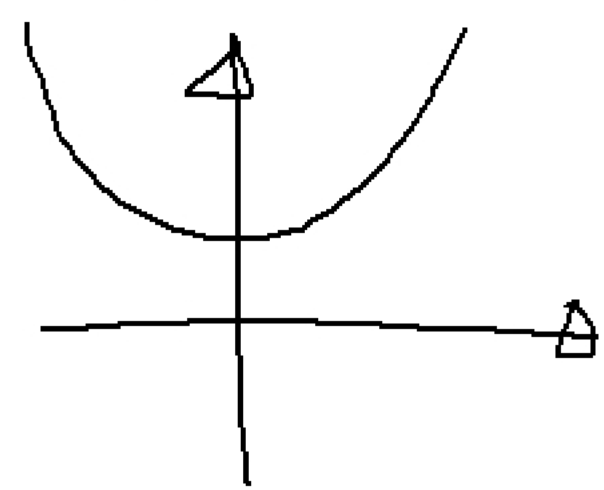
Efter kvadratkomplettering har vi en ekvation på formen

$$A\xi^2 + 2Ey + G = 0$$

$E \neq 0 \Rightarrow$

$$y = -\frac{A}{2E}x^2 - \frac{G}{2E}$$

parabel



$E = 0$ ingenting eller par av linjer

$B \neq 0$: $\quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$

kan skrivas med matriser som

$$\vec{x}^T K \vec{x} = (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(= (x,y) \begin{pmatrix} Ax + By \\ Bx + Cy \end{pmatrix} = Ax^2 + Bxy + {} \right.$$
$$\left. + Bxy + Cy^2 \right)$$

Vi vill reducera till det tidigare fallet $(B = 0)$ genom att välja koordinater som diagonaliserar K.

$$\vec{x}_e^{\,T} K_e \vec{x}_e = \vec{x}_f^{\,T} \underbrace{C^T K_e C}_{K_f} \vec{x}_f$$

Vi vill alltså hitta en bas f så att K_f blir en diagonalmatris.

Ex/Övn: $x^2 + 2xy = 3$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\eta^2 = 3$$

Ex/Övn: Vad representerar

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y - 3 = 0$$

geometriskt?

$$\vec{x}_e^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}_e + 2\overset{\vec{l}^T}{(0, -1)} \vec{x}_e - 3 = 0$$

K_e $\qquad$ $\vec{l}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_f^T K_f \vec{x}_f + 2\vec{l}_f^T \vec{x}_f - 3 = 0$$

$$\vec{l}_e^T \vec{x}_e = \vec{l}_e^T C \vec{x}_f = (C^T \vec{l}_e)^T \vec{x}_f \Rightarrow \vec{l}_f = C^T \vec{l}_e$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) u = v \qquad \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tau ex \ \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$l_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\xi^2+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\eta^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\xi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\eta\right)-3=0$$

Det återstår att kvadratkomplettera

...

Andragradsytor

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 +$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

$$(x, y, z) \underbrace{\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}}_{K_e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \underbrace{(G, H, I)}_{\ell_e^T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$

$$\vec{x}_e^{\,T} K_e \vec{x}_e + 2 \vec{\ell}_e^{\,T} \vec{x}_e + J = 0$$

Ex/Övn: Vad slags yta representerar ekvationen

$$5x^2 - 8xy + 4y^2 + 8yz + 3z^2 + 18x = 3 \, ?$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{\ell}_e = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 17 = 0$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16+17}$$

...

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - 16(3-\lambda) - 16(5-\lambda) =$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - 32(4-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda) - 32) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 17)$$