Diagonalisering

Vi vill ha enkla avbildnings-matriser och speciellt diagonala.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 5 \end{pmatrix}$$

Potenser blir enkla

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 2^{50} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{50} \end{pmatrix}$$

Att diagonalisera en matris betyder att hitta en koordinat-transformation som tar matrisen till en diagonalmatris.

Eftersom en diagonalmatris svarar mot töjningar i olika riktningar måste det finnas riktningar där den ursprungliga matrisen fungerar som en töjning; dvs det finns en vektor $\vec{v}$ så att

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \qquad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

konstant

$\vec{v}$ kallas egenvektor och λ egenvärde

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

vilket ger en polynomekvation som har egenvärdena som rötter.

Ex/övn: Finn eventuella (reella) egenvärden till följande matriser.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \mp 2$$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

SVAR: (i) $-1, 3$ (ii) inga (om inte $\varphi = 0$ el π)

(iii) 1 (iv) $0, 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ egenvärden $-1, 3$

Egenvektorer $\quad A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (A-\lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

$$-1: \quad \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = -v$$

en egenvektor med egenvärde -1 är tex $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Egenvektor för egenvärde 3 tex $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sats: Om en matris A är symmetrisk så är egenvektorer som svarar mot olika egenvärden vinkelräta.

bevis: Låt $\vec{u}, \vec{v}$ vara egenvektorer med egenvärden λ resp μ, $\mu \neq \lambda$.
Då har vi

$$\mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot A\vec{v} = A^T\vec{u} \cdot \vec{v} = A\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\Leftrightarrow (\mu - \lambda)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

för $\lambda \neq \mu$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot A\vec{v} = \vec{u}^T A \vec{v} = (A^T\vec{u})^T \vec{v} = A^T\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Sats: I allmänhet har vi att egenvektorer som svarar mot olika egenvärden är linjärt oberoende.

Från detta följer att

Sats: Om A är en $n \times n$ matris som har n stycken olika egenvärden, då är A diagonaliserbar.

Sats (spektralsatsen): En matris A kan diagonaliseras med hjälp av ett koordinatbyte av ON-typ om och endast om A är symmetrisk.

bevis($\Rightarrow$): $C^TAC = D$ (diagonal)

$$A = CDC^T$$

$$A^T = (C^T)^T D^T C^T = C D^T C^T = CDC^T = A$$

så A är symmetrisk.

Ex/Övn: Diagonalisera

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 16 = 0$$

En rot $\lambda = 1$ dubbel rot $\lambda = 4$

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 3-1 & -1 & 1 \\ -1 & 3-1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spänner

delrummet av egenvektorer

med egenvärde 4.