forts $\mathbb{R}^n$

Vi har sett att en bas för $\mathbb{R}^n$ högst består av n vektorer och vi ska visa under resonemangsuppgiften att

SATS: Alla baser i $\mathbb{R}^n$ består av n st basvektorer.

Ex: Låt $\vec{f}_1 = (1,2)$, $\vec{f}_2 = (1,1)$ och vi betracktar vektorn $(5,2)$. Vad har den för koordinater i basen $\mathcal{F}$?

Vi vill alltså skriva vektorn $(5,2)$ som en linjär kombination av $\vec{f}_1, \vec{f}_2$

$$(5,2) = c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2$$

dvs lös
$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right). \\ \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & \end{array} \end{array}$$

SVAR: $c_1 = -3$, $c_2 = 8$

$$(5,2) = -3(1,2) + 8(1,1) \qquad \text{OK}$$

$$(5,2) = (-3,8)_f$$

Låt oss försöka hitta ett samband mellan koordinatframställningarna.

$$\vec{f}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$$

$$\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{v} = (-3,8)_f = -3\vec{f}_1 + 8\vec{f}_2 =$$

$$= (\vec{f}_1, \vec{f}_2)\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (5,2) = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

Vi får därmed sambanden

$$\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}_{\substack{\text{koordinaterna}\\ \text{i } e\text{-systemet}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}}_{\substack{\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2\\ \text{uttryckta}\\ \text{i } e\text{-systemet}}} \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}}_{\substack{\text{koordinaterna i}\\ f\text{-systemet}}}$$

$$\vec{x}_e = \underbrace{C}_{\text{transformationsmatris}} \vec{x}_f$$

Övn: Låt g vara basen $\vec{g}_1 = (3,-1)$, $\vec{g}_2 = (0,1)$. Finn vektorn $(5,2)$:s koordinater i g-systemet genom att transformera

$$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}_g$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \vec{x}_g = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$$

Hitta transformationsmatrisen som går mellan f och g-systemen.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

kolonnvektorerna ska vara g-basen uttryckt i f-basen.

$$\vec{x}_f = C \vec{x}_g$$

$$\vec{X}_e = C_1 \vec{X}_f$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{X}_f = C_1^{-1} \vec{X}_e$$

Vi hade också

$$\vec{X}_e = C_2 \vec{X}_g$$

vilket ger

$$\vec{X}_f = C_1^{-1} \vec{X}_e = C_1^{-1}\left(C_2 \vec{X}_g\right) = \underbrace{\left(C_1^{-1} C_2\right)}_{C} \vec{X}_g$$

I vårt exempel

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

och $C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, vilket ger

$$C = C_1^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Mer direkt kan man lösa det simultana systemet

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

(Det är lätt att se att det här egentligen är samma sak)

Linjära avbildningar under koordinattransformationer:

$$\vec{Y}_e = A_e \vec{X}_e$$

avbildningsmatrisen i e-systemet

Vi har att

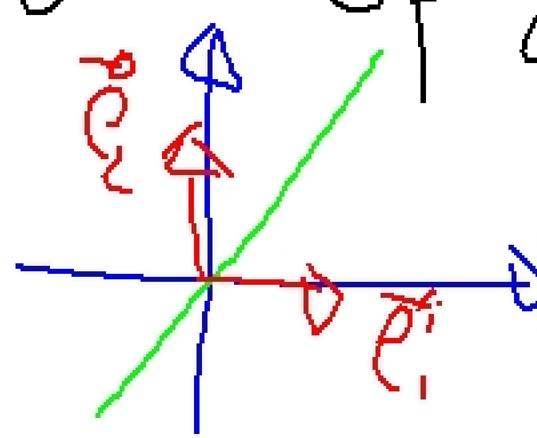
$$\vec{X}_e = C\vec{X}_f \quad \text{och} \quad \vec{Y}_e = C\vec{Y}_f$$

så

$$C\vec{Y}_f = A_e C\vec{X}_f \Rightarrow$$

$$\vec{y}_f = \underbrace{C^{-1} A_e C}_{= A_f} \vec{x}_f$$

Exempelövning: Bestäm avbildningsmatrisen i $\underline{f}$-systemet för den linjära avbildning som i $\underline{e}$-systemet är en spegling i linjen $x = y$.



$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exempelövning: Bestäm avbildningsmatrisen i g-systemet för den linjära avbildning som i e-systemet fås som rotation moturs med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$