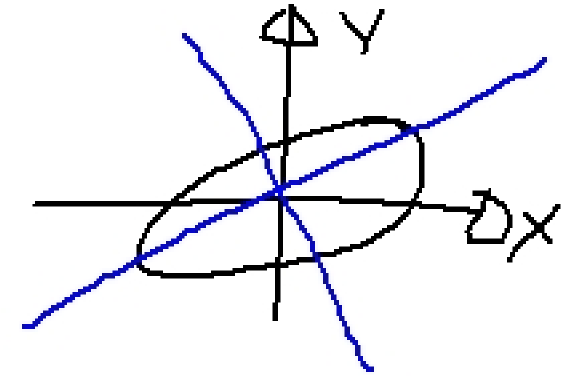
ÅRSKURSMÄRKE IT03

Gå in på http://it03.ws83.net
för att se förslagen

och http://it03.ducce.com/forum
för diskussion.

(IT03's forum)

$$2x^2+2xy+2y^2=1$$



$$K=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \qquad (x\ \ y)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1)$$

Ta fram egenvärden

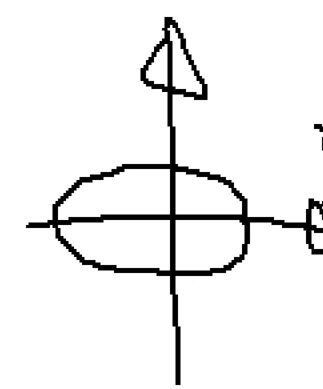
$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3$$

$$\lambda^2-4\lambda+3=0 \iff (\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=1\,,\quad \lambda_2=3$$

$$\xi^2+3\eta^2=1$$

en ellips



Huvudaxlarnas riktningar ges av egenvektorerna

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Om vi har linjära termer $2\vec{l}^{\,T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ måste vi transformera till $2(C^T l)^T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2K$$

Stationära punkter:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$$

(tänkbara extrempunkter)

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

max: $\det H > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

min: $\det H > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$\det H < 0$ sadelpunkt

$\det H = 0$ vet ej (jmfr 1-var $f''(x) = 0$)

Stationär punkt $(0,0)$

Ex: x^2+y^2 origo minpunkt

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ det >0 >0

Ex: $-x^2-y^2$ maxpunkt

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ det >0 <0

Ex: x^2-y^2 sadelpunkt

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ det <0

Taylorutveckling:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right) + O\left(|(x-a,y-b)|^3\right)$$

$$= f(a,b) + \underbrace{\operatorname{grad} f(a,b)}_{=0} \cdot (x-a,y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left((x-a,y-b)\, H(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right) + O\left(|(x-a,y-b)|^3\right)$$

Om (a,b) stationär punkt så f's utseende bestäms av H.

1:a ordningens utveckling

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + O(|(x-a,y-b)|^2)$$

grafen $z = f(x,y)$

Planet

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

är tangentplanet till grafen $z=f(x,y)$ över punkten $(x,y)=(a,b)$.

I en variabel $y = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + O(\ldots)$

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ tangentlinje

Vi kan också se grafen $z = f(x,y)$ som en nivåyta i rummet $F(x,y,z) = 0$ där $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Normalen till nivåytan ges av $\operatorname{grad} F$ dvs av $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. Tangentplanet blir så

$$\operatorname{grad} F(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

dvs $0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) \cdot (x-a, y-b, z-c) =$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - (z - f(a,b))$$

$$\iff \quad z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b)$$

Som parameter yta

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial x}, 1\right)$$

dvs - den vi fick tidigare

reguljär yta $\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$

reguljär kurva $\quad \vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$

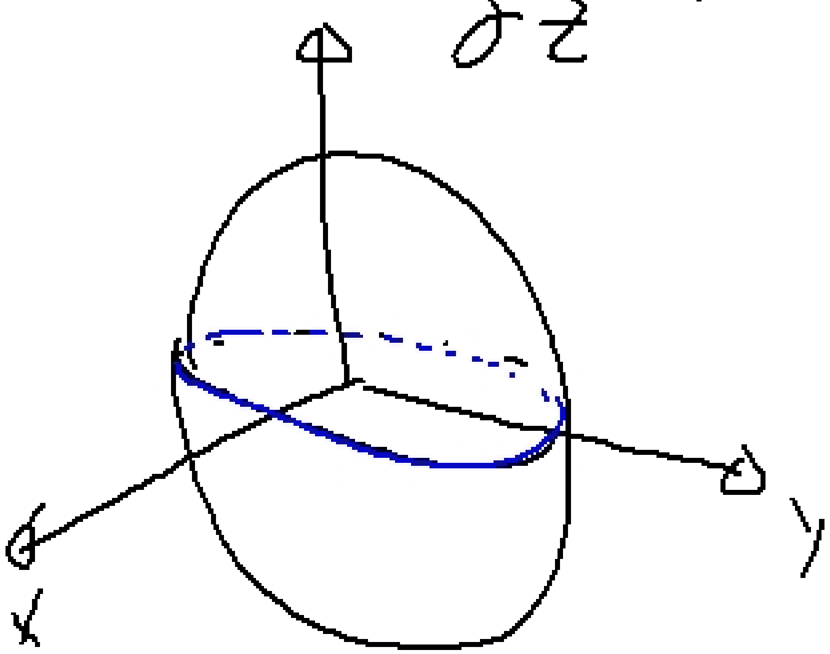
Tex: Enhetscirkeln

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ är reguljär för

$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Vi vill se nivåytan som en graf $z = z(x,y)$. Det går när



$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$ dvs när $2z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$

Beräkna $z'_x\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Då z löses ut i omg av $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$x^2 + y^2 + (z(x,y))^2 = 1$$

ger $2x + 2z(x,y)\,z'_x(x,y) = 0$

i punkten $2z\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) z'_x\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow z'_x\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

Inversa funktioner:

Låt $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, differentierbar

$$\vec{f}(\vec{r}) \approx \vec{f}(\vec{r}_0) + J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)\,\vec{r}$$

Så f har lokal differentierbar invers nära $\vec{r}_0$ om den linjära avbildningen $\vec{r} \to J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)\,\vec{r}$ är inverterbar, dvs om

$$\det J_{\vec{f}}(\vec{r}_0) \neq 0.$$

Ex: Låt $g(t) = (t, t^2)$ och $f(x,y) = xy$. Bestäm $\frac{d}{dt}(f \circ g(t))$

$$\frac{d}{dt}(f \circ g(t)) = J_f(g(t))\, J_g(t)$$

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad J_f(g(t)) = \operatorname{grad} f(g(t)) = (t^2, t)$$

så $$\frac{d}{dt}(f \circ g(t)) = (t^2, t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 3t^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\circ g(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))\frac{dy}{dt}$$

$$= \operatorname{grad} f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Låt $h(x,y) = g(f(x,y))$ och bestäm $J_h(x,y)$. Enligt kedjeregeln har vi att

$$J_h(x,y) = J_g(f(x,y))\, J_f(x,y)$$

$$= \left(\frac{1}{2f(x,y)}\right)(y,x) = \left(\frac{1}{2xy}\right)(y,x) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2xy^2} & \frac{x}{2x^2y} \end{pmatrix}$$

Taylorutveckla $f(x,y) = e^{xy}$

i $(1,2)$ till 2:a ordningen

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

$$x = 1+h, \quad y = 2+k$$

$$e^{xy} = e^{(1+h)(2+k)} = e^{2+k+2h+hk} = e^2 e^{k+2h+hk}$$

Så Taylorutvecklingen blir

$$e^2\left(1 + (k+2h+hk) + \underline{(k+2h+\cancel{hk})^2}\right) + O(|(h,k)|^3)$$

$$= e^2 + e^2 k + e^2 2h + e^2\left(\frac{k^2}{2} + 2h^2 + 3hk\right) + O(|(h,k)|^3)$$

$$= e^2 + e^2(y-2) + 2e^2(x-1) + \frac{e^2}{2}(y-2)^2 +$$

$$+ 2e^2(x-1)^2 + 3e^2(x-1)(y-2) +$$

$$+ O(\|(x-1, y-2)\|^3)$$