$\mathbb{R}^n$

Finns origo och ett val av koordinatsystem.

<u>Standardbas:</u> $\{(1,0),(0,1)\}$ i $\mathbb{R}^2$

$$\{(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

En punkt eller ortsvektor

$$(x_1,\dots,x_n)$$

Skalär produkt:

$$(x_1, \dots, x_n) \bullet (y_1, \dots, y_n) =$$

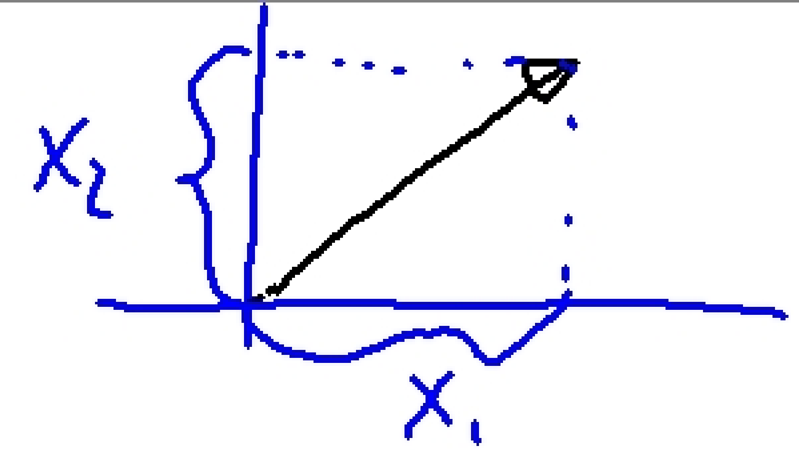
$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Längd:

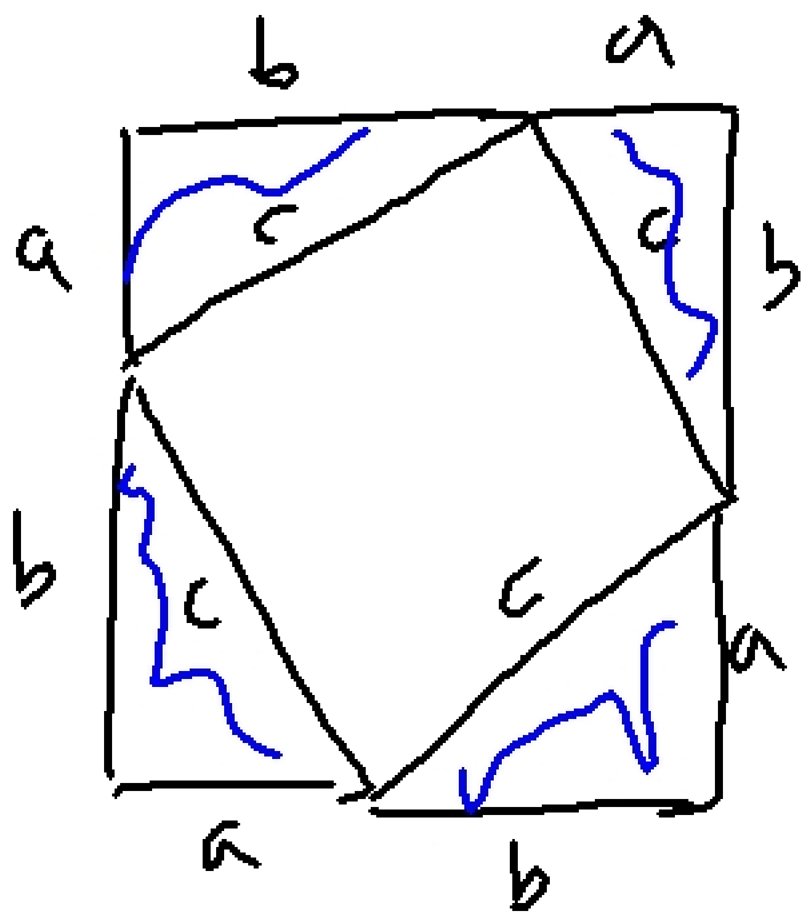
$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$n=1$: $|\vec{x}| = |x_1|$

$n=2: \quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$



Pythagoras sats:



Stora kvadraten

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Inre kvadrat

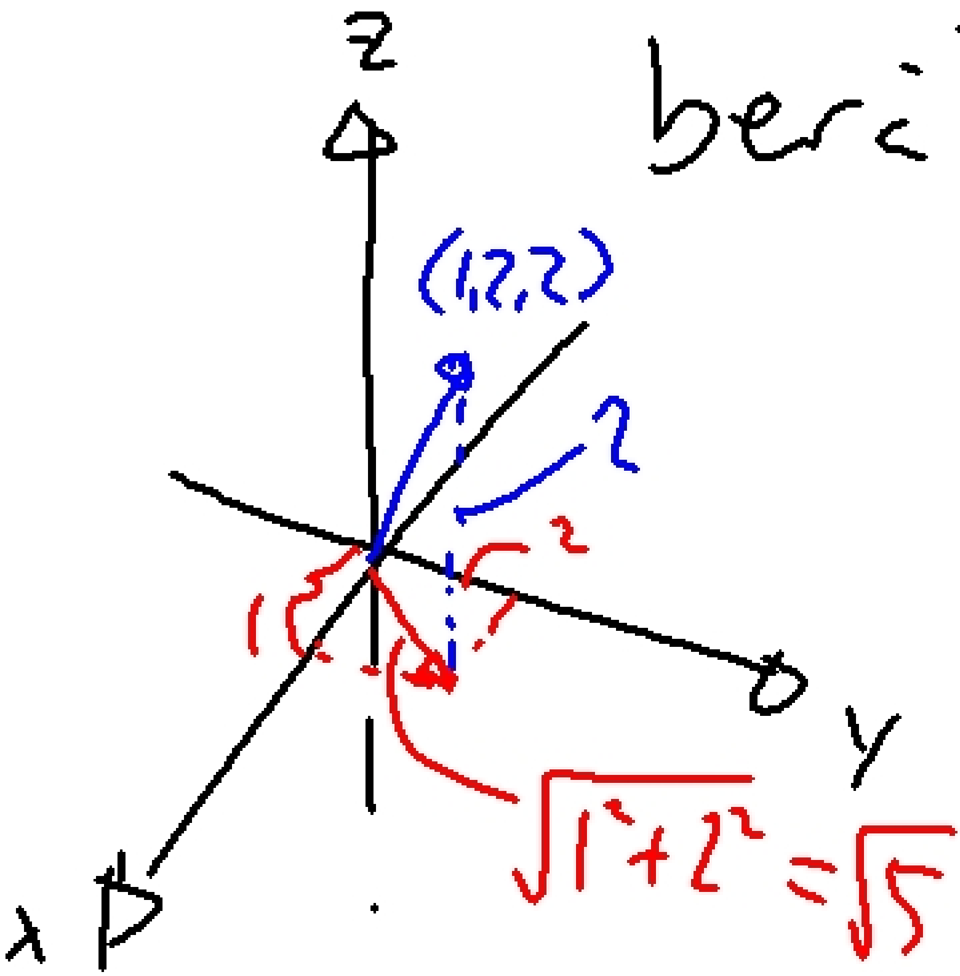
$$c^2$$

Blå området

$$2ab$$

Alltså: $a^2+b^2+2ab = c^2+2ab \Rightarrow a^2+b^2 = c^2$ □

Övning: använd Pythagoras två gånger för att beräkna $|(1,2,2)|$.



$$|(1,2,2)| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Stämmer med

$$\sqrt{1^2+2^2+2^2}$$

I $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ definierade vi skalärprodukten via vinkeln mellan vektorerna, men i $\mathbb{R}^n$ har vi ingen bra geometrisk intuition men vi kan definiera vinkeln genom skalärprodukten

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\varphi$$

dvs $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

För att kunna definiera vinkeln behöver vi att

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|.$$

(Cauchy-Schwarz olikhet)

För att visa den olikheten betraktar vi

$$0 \leq |t\vec{u}+\vec{v}|^2 = (t\vec{u}+\vec{v})\cdot(t\vec{u}+\vec{v}) =$$

$$= t^2\vec{u}\cdot\vec{u} + 2t\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$$

$$= t^2|\vec{u}|^2 + 2t\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

För att hitta min deriverar vi och sätter derivatan $=0$.

$$0 = \frac{d}{dt}\left(|t\vec{u}+\vec{v}|^2\right) = 2t|\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

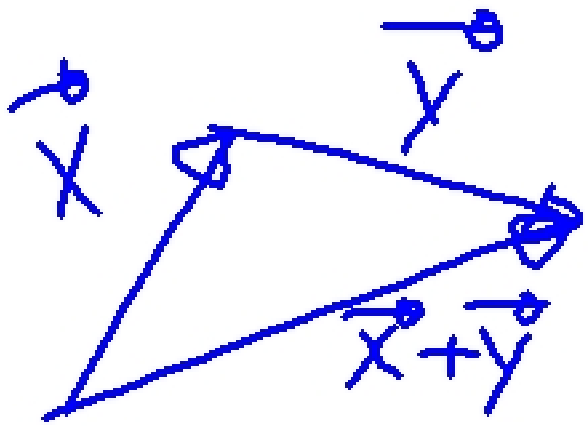
$$\Rightarrow t = -\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}.$$

Sätter vi in det i $|t\vec{u}+\vec{v}|^2$ får vi

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^4}|\vec{u}|^2 - 2\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2} + |\vec{v}|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 - \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2} \geq 0 \qquad \text{VSV.}$$

Triangelolikheten:



$$|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Bevis:
$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) =$$
$$|\vec{x}|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2 \leq \text{(Cauchy-Schwarz)}$$
$$\leq |\vec{x}|^2 + 2\,|\vec{x}|\,|\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

Linjärt beroende

När är två vektorer parallella? SVAR: När de har samma riktning, dvs

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$ eller $\vec{v} = \vec{0}$.

Så vi kan uttrycka $\vec{u}$ i termer av $\vec{v}$. De är linjärt beroende.

Def: En uppsättning $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ av vektorer sägs vara linjärt beroende om

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

för ett icke-trivialt val av $c_1, \dots, c_k$ (dvs inte alla noll).

Om de inte är linjärt beroende säger vi att vektorerna är linjärt oberoende.

Ex: Om $\vec{u} \parallel \vec{v}$ så är $\vec{u}$ och $\vec{v}$ linjärt beroende.

Ex: $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ är linjärt beroende.

Övn: visa det!

$$3(1,1)-(1,2)-(2,1)=(0,0)$$

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

I exemplet

$$c_1(1,1) + c_2(1,2) + c_3(2,1) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

1:a position

2:a position

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

För att avgöra om $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ är linjärt beroende eller ej så undersöker vi huruvida systemet

$$\left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \dots \middle| \vec{v}_k \middle| \vec{0}\right)$$

har en icke-trivial lösning eller ej.

Ex/Övn: Avgör om vektorerna $(1,1,2,0), (0,1,1,-1), (2,0,0,3)$ är linjärt oberoende eller ej.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

SVAR: linjärt oberoende.

SATS: k vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende om $k > n$.

Bevis: Systemet

$$\left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \ldots \middle| \vec{v}_k \middle| \vec{0}\right)$$

är då liggande (antalet kolonner är > antalet rader i VL) och liggande homogena system har oändligt många lösningar.

Def: Om en uppsättning vektorer $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ kallar vi uppsättningen för en bas. Dvs om en godtycklig vektor $\vec{u}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k.$$

$$\left[\left(\vec{v}_1 \middle| \dots \middle| \vec{v}_k \middle| \vec{u} \right) \right]$$

Begreppsuppgift:

Ge antingen ett vardags exempel på en funktion i flera variabler eller skriv om derivata så att ett barn kan förstå det.