En uppsättning vektorer $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ sägs vara linjärt oberoende om ekvationen

$$c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_k\vec{u}_k = \vec{0}$$

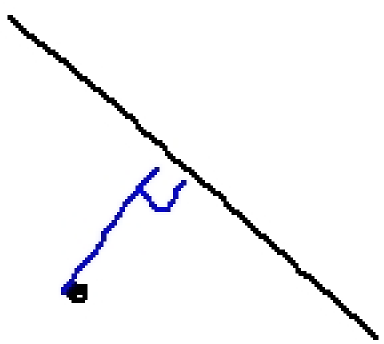
bara har lösningen $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Om ekvationen har en annan lösning sägs vektorerna vara linjärt beroende.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_k & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Om $k=n$, vektorernas längd kan detta testas med en determinant.

Ex: Vilken punkt på linjen $x+y=1$ ligger närmast origo.



Ett sätt att lösa det geometriskt, men vi kan också använda Lagranges metod.

bivillkor

funktion att minimera $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=x+y-1$

Lagranges metod säger att

grad $f \parallel$ grad g eller så är

grad $g = \vec{0}$ i minpunkten.

Men grad $g = (1,1) \neq \vec{0}$

och grad $f = (2x, 2y)$

så $(2x, 2y) = \lambda(1,1)$ dvs

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow (\text{insätt i } g=0) \Rightarrow 2x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} = y.$$

I det här fallet är antalet vektor = antalet dimensioner så vi kan lika gärna räkna determinanten

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2x \Rightarrow x = y.$$

Om $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}\}$ är linjärt beroende men $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ är linjärt oberoende kan man fråga sig hur $\vec{v}$ kan uttryckas

som linjär kombination av
$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$.

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \dots + c_k\vec{u}_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_k \,\middle|\, \vec{v}\right)$$

Om vi har en uppsättning vektorer sådan att alla andra vektorer kan skrivas som linjär kombinationer av de vektorerna, kallas uppsättningen en bas.

En bas där alla basvektorerna har längd 1 och är ortogonala kallas en ON-bas. Vi kan byta bas med hjälp av transformationer

$$\vec{X}_e = C\vec{X}_f$$

kolonnerna är f-vektorerna uttryckta i $\vec{e}$-basen

$\vec{X}$ koordinater i gamla basen

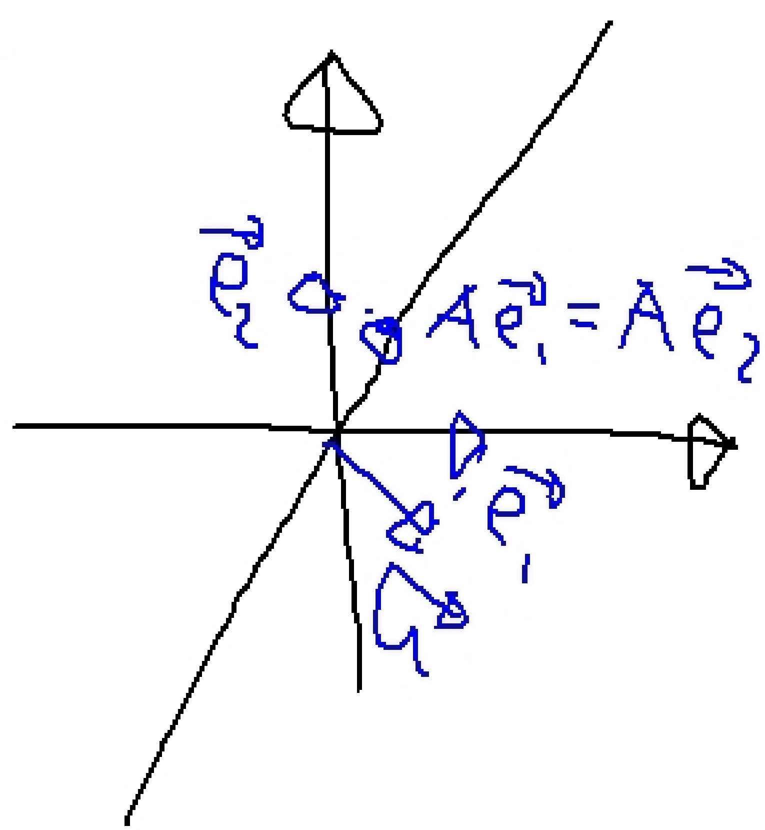
$\vec{X}$ koordinater i nya basen

Linjära avbildningar:

Ex: Bestäm avbildningsmatrisen (i standardbasen) som svarar mot projektion på linjen

$\Leftrightarrow$ $y = x$.

$x - y = 0$



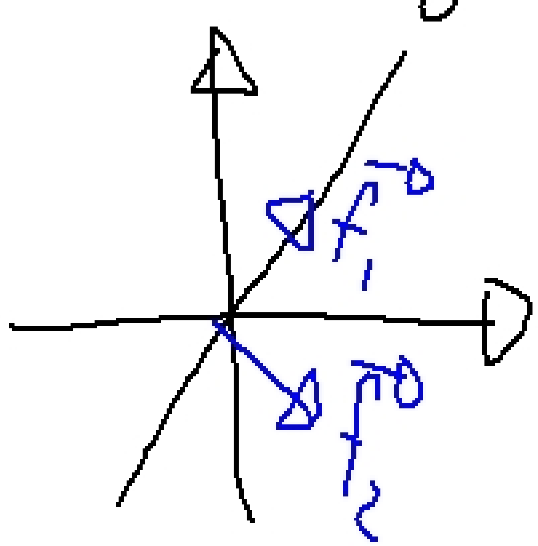
$$A = \begin{pmatrix} A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 - (\vec{e}_1 \cdot \hat{n})\,\hat{n} = (1,0) - \frac{1}{2}(1,-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{n} = \frac{(1,-1)}{|(1,-1)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Om A tar en ON-bas till en annan blir avbildningsmatrisen precis transformationsmatrisen mellan den ursprungliga basen och dess bild.

Vi kan också transformera linjära avbildningar



Låt $\vec{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\vec{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

I $\vec{f}$-basen blir projektionen på linjen $y=x$ bara $A_f = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Om $\vec{y}_e = A_e \vec{x}_e \Leftrightarrow C\vec{y}_f = A_e C \vec{x}_f$

$$\Rightarrow \vec{y}_f = (C^{-1} A_e C)\vec{x}_f \quad \text{dvs } A_f = C^{-1} A_e C$$

vilket ger $C A_f C^{-1} = A_e$.

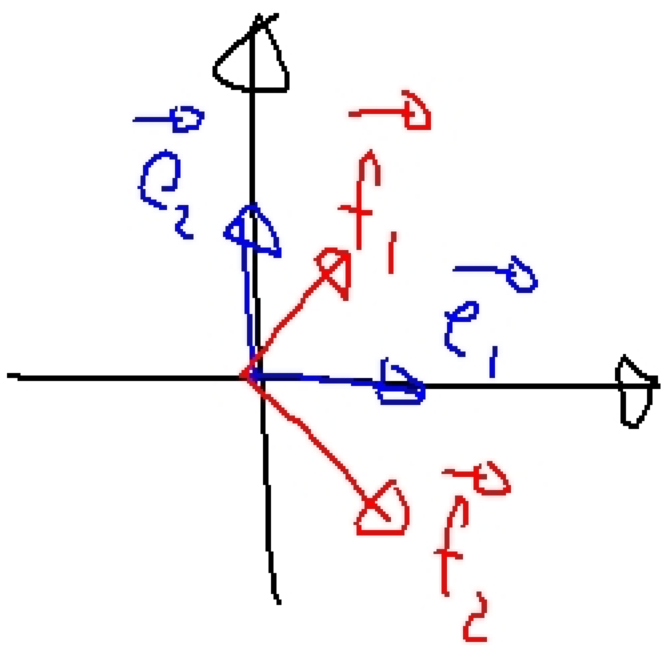
För ON-basbyten har vi $C^{-1} = C^T$ så

$$A_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

avbildningsskala:

Låt A vara avbildningen med avbildningsmatris $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ då är avbildningsskalan

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

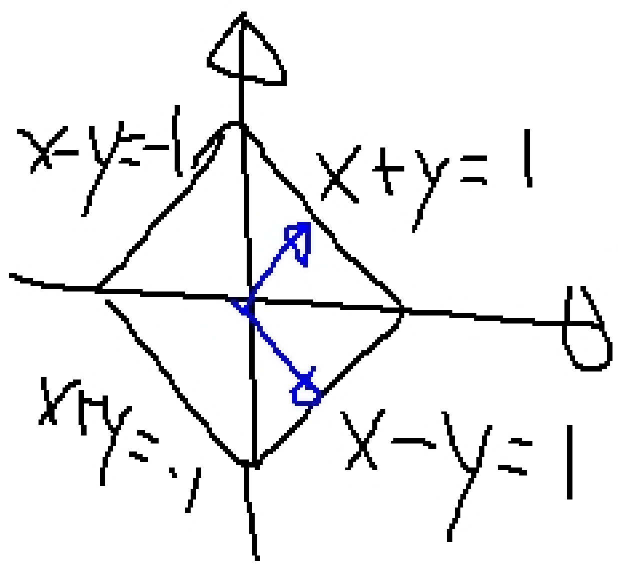


Liknande faktorn $|\det J_1|$ för substitution i multipelintegraler.

differentierbarhet

$$\vec{f}(\vec{r}) \approx \vec{f}(\vec{r}_0) + \underbrace{J_{\vec{f}}(\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)}_{\text{linjär avbildning}}$$

Ex: Beräkna $\iint_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy$ då



$T: \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$

$$J_T = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} u \\ \operatorname{grad} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jämför med transformationsmatrisen.

$$|\det J_T| = \frac{1}{|\det J_{T^{-1}}|} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_\Omega x+y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u\,\frac{1}{2}\,du\,dv = 0$$

Polära koordinater:

Ex: Beräkna arean hos området begränsat av $(x-1)^2+2y^2=1$.

$$T: \begin{cases} x = r\cos\varphi + 1 \\ y = \dfrac{r\sin\varphi}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \iint_\Omega dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} |\det J_T|\,d\varphi\,dr$$

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\det J_T\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$\int_9^0$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{2}}\, d\varphi\, dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$T^{-1}: \begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{2}\, y \end{cases} \qquad (u-1)^2 + v^2 \leq 1$$

$$|\det J_T| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S: \begin{cases} u = r\cos\varphi + 1 \\ v = r\sin\varphi \end{cases} \qquad |\det J_S| = r$$

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{T^{-1}(\Omega)} |\det J_T|\, du\, dv = \iint_{S^{-1}(T^{-1}(\Omega))} |\det J_S|\,|\det J_T|\, d\varphi\, dr$$

Minns att matrisen för en sammansättning av linjära avbildningar är produkten av avbildningsmatriserna polära + z = cylinderkoordinater

Ex: Beräkna volymen hos den del av klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ där $x^2+y^2 \leq 1$.

Lösning: $-\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,d\varphi\,dr = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{4-r^2}\, r\,dr = 2\pi \left[\frac{-2(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad |\det J_T| = r^2\sin\theta$$

Ex: Klotets volym $(x^2+y^2+z^2 \leq R^2)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{R^3}{3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} 2 = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Ex: Beräkna flödet ut genom enhetssfären för fältet $\vec{F} = (x, y, z)$.

Lösn: $$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, z) = 3$$

dvs vi får $3 \cdot$ volymen hos enhetsklotet som vi just sett är $\frac{4\pi}{3}$, dvs vi får 4π.

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \pm\iint \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

$\vec{r}(u,v)$ inverterbar parametrisering av S.

där tecknet bestäms av om $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ har samma resp motsatt riktning mot $\hat{n}$

$$\iint \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\underbrace{\frac{\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)}{\left|\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\right|}}_{\hat{n}}\ \underbrace{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|du\,dv}_{\text{ytelement}}$$

motsvarar $|\det J_T|$