Rättelse: I satsen som gav ett tillräckligt villkor för inverterbarhet är det viktigt att parametriseringen är kontinuerligt inverterbar.

Sats: Låt $\vec{F}$ vara ett fält med kontinuerliga derivator och låt $K_1, \ldots$ vara en följd av kroppar med strängt avtagande diameter, $d_n \to 0$, sådana att de alla innehåller punkten $\vec{r}_0$. Då gäller

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\oiint_{\partial K_n} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma}{\iiint_{K_n} dx\,dy\,dz}$$

Bevis: Gauss sats säger att

$$\iint_{\partial K_n}\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma = \iiint_{K_n} \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\,dxdydz$$

Då $\vec{F}$ har kontinuerlig derivator är $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})$ en kontinuerlig funktion så medelvärdessatsen ger

$$\iiint_{K_n} \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\,dxdydz = \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}_n)\iiint_{K_n} dxdydz$$

för någon punkt $\vec{r}_n \in K_n$. Eftersom $d_n \to 0$ måste vi ha $\vec{r}_n \to \vec{r}_0$ vilket slutför beviset.

Ex/öm: En elektrisk laddning q ger upphov till ett fält $\vec{E} = Cq\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$.

Bestäm flödet $\iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$ ut från sfären S

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lösn: Parametrisera sfären som

$$r(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Vi vill räkna

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) d\theta\, d\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} C_q \frac{\vec{r}(\theta,\varphi)}{|\vec{r}(\theta,\varphi)|^3} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\, d\theta\, d\varphi =$$

(Eftersom $\vec{r}(\theta,\varphi)$ ligger på enhetssfären är $|\vec{r}(\theta,\varphi)| = 1$.)

$$= C_q \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{r}(\theta,\varphi) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= C_q \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \cdot (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= C_q \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^3\theta \sin^2\varphi}_{1} + \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= C_q \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta + \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= C_q \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi C_q \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi C_q .$$

Ex/övn: Beräkna $\operatorname{div}\vec{E}$.

Lösn: $\operatorname{div}\left(\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3}\right)$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{|(x,y,z)|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{|(x,y,z)|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{|(x,y,z)|^3}\right)$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$= \frac{1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$ + motsv i y och z

$= 0$

Konservativa fält i $\mathbb{R}^3$

Def: Som i planet sägs ett fält $\vec{F} = (P, Q, R)$ i rummet $\mathbb{R}^3$ vara konservativt omm linjeintegralen

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

bara beror på kurvans ändpunkter.

Ex/övn: Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{då} \quad \vec{F}(x,y,z) = (x,z,y)$$

och Γ parametriseras av

$$\vec{r}(t) = (\cos t, t^2, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Lösn: $$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t^2) \cdot (-\sin t, 2t, \cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t + 2t \sin t + t^2 \cos t \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin 2t}{2} + \frac{d}{dt}\left(t^2 \sin t\right) dt$$

$$= \left[\cancel{\frac{\cos 2t}{4}} + t^2 \sin t \right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 \sin 2\pi = 0$$

<u>Sats</u>: Låt $\vec{F}(\vec{r})$ vara ett fält definierat i ett öppet, sammanhängande område D i $\mathbb{R}^3$. Då är följande ekvivalent

a) Fältet är konservativt

b) $\oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva $\Gamma \subseteq D$.

c) Fältet har en potential U, dvs $\operatorname{grad} U(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$.

Ex: $\vec{F}(x,y,z) = (x,z,y)$ är konservativt

för det har en potential

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + yz$$

Def: rotationen $\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

Ex: Om $\vec{F}(x,y,z) = (x,z,y)$ så blir

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & z & y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, -\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) =$$

$$= (0,0,0)$$

Sats: Om fältet $\vec{F}$ är konservativt och har kontinuerliga derivator i området D så är $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ i hela D.

Bevis: Låt U vara $\vec{F}$:s potential dvs $\vec{F} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ så

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right) =$$

$$= (0, 0, 0)$$