Sats 11.1: Om ett reguljärt ytstycke Σ har en parameterframställning

$$(u,v) \to \vec{r}(u,v)$$

där $(u,v) \in D$ där D är ett sammanhängande område $\subseteq \mathbb{R}^2$.

Om $(u,v) \to \vec{r}(u,v)$ är inverterbar

$$D \to \Sigma$$

så är Σ orienterbar.

Divergens

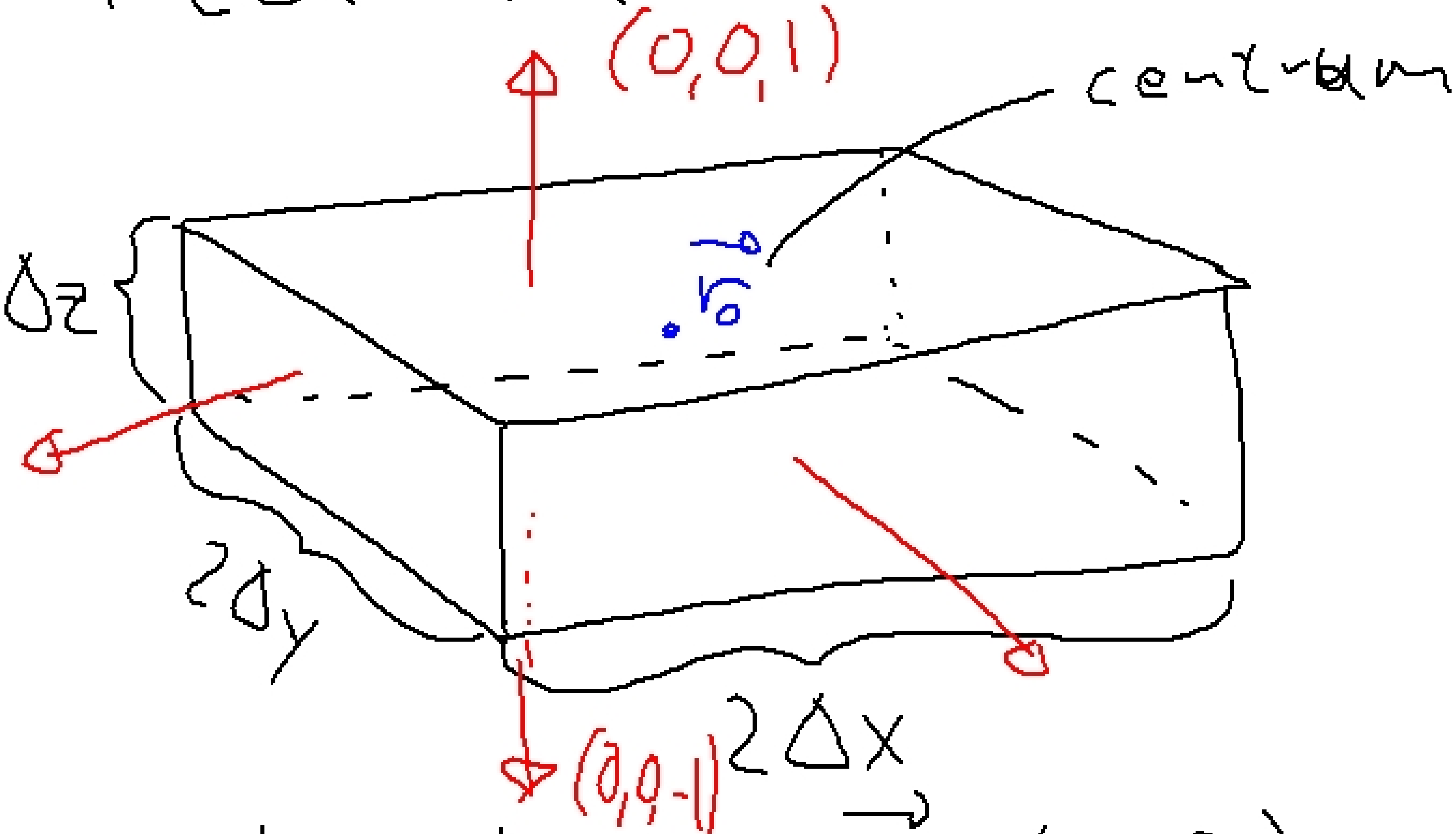
Betrakta en kropp K med randyta ∂K som antas styckvis regulär (och orienterbar)

Givet ett vektorfält $\vec{F}$ så är flödet ut ur K

$$\oiint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$$

Om det inte finns några källor i K så blir flödet noll.

Som i boken specialiserar vi oss till fallet då K är ett litet rätblock



Vidare antar vi att $\vec{F} = (0,0,R)$ och dessutom antar vi att

$\vec{r} = (x, y, z)$

$$R(\vec{r}_0 + \vec{r}) = R(\vec{r}_0) + A\vec{r}$$

$$= R(\vec{r}_0) + \underbrace{\frac{\partial R(\vec{r}_0)}{\partial x} x + \frac{\partial R}{\partial y} y + \frac{\partial R}{\partial z}}_{\text{beror ej av } x,y,z} z$$

det ger att flödet blir

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial K} (0,0,R)\cdot\hat{n}\, d\sigma = \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} R(x, y, z_0+\Delta z)\, dx\, dy -$$

$$-\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} R(x, y, z_0-\Delta z)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} 2\frac{\partial R}{\partial z}\Delta z\,dx\,dy = 8\frac{\partial R}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

Så medelkälldensiteten blir här

$$\frac{8\frac{\partial R}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z}{8\Delta x\Delta y\Delta z} = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Om $\vec{F} = (P, Q, R) =$

$= (P, 0, 0) + (0, Q, 0) + (0, 0, R)$

så blir flödet

$$\oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oiint_{\partial K} (P, Q, R) \cdot \hat{n}\, d\sigma =$$

$$= \oiint_{\partial K} (P, 0, 0) \cdot \hat{n}\, d\sigma + \oiint_{\partial K} (0, Q, 0) \cdot \hat{n}\, d\sigma + \oiint_{\partial K} (0, 0, R) \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

Om nu K är ett litet rätblock och P, Q, R är av typ "konstant + linjär term" så blir medelkälldensiteten för $\vec{F}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

I allmänna fall använder vi oss av begreppet differentierbarhet.

Om $\vec{F}$ är en differentierbar funktion så kan $\vec{F}$ approximeras

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \approx \vec{F}(\vec{r}_0) + J_{\vec{F}}(\vec{r}_0)\,\Delta\vec{r}$$

Högerledet är av samma typ som vi redan betraktat.

Vi inför därför

Def: $$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(divergensen / källdensiteten)

Om vi använder nabla operatorn

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(minns att $\nabla f = \operatorname{grad} f$)

kan vi skriva

$$\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}$$

Ex/övn: Bestäm $\operatorname{div} \vec{F}$ då

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}.$$

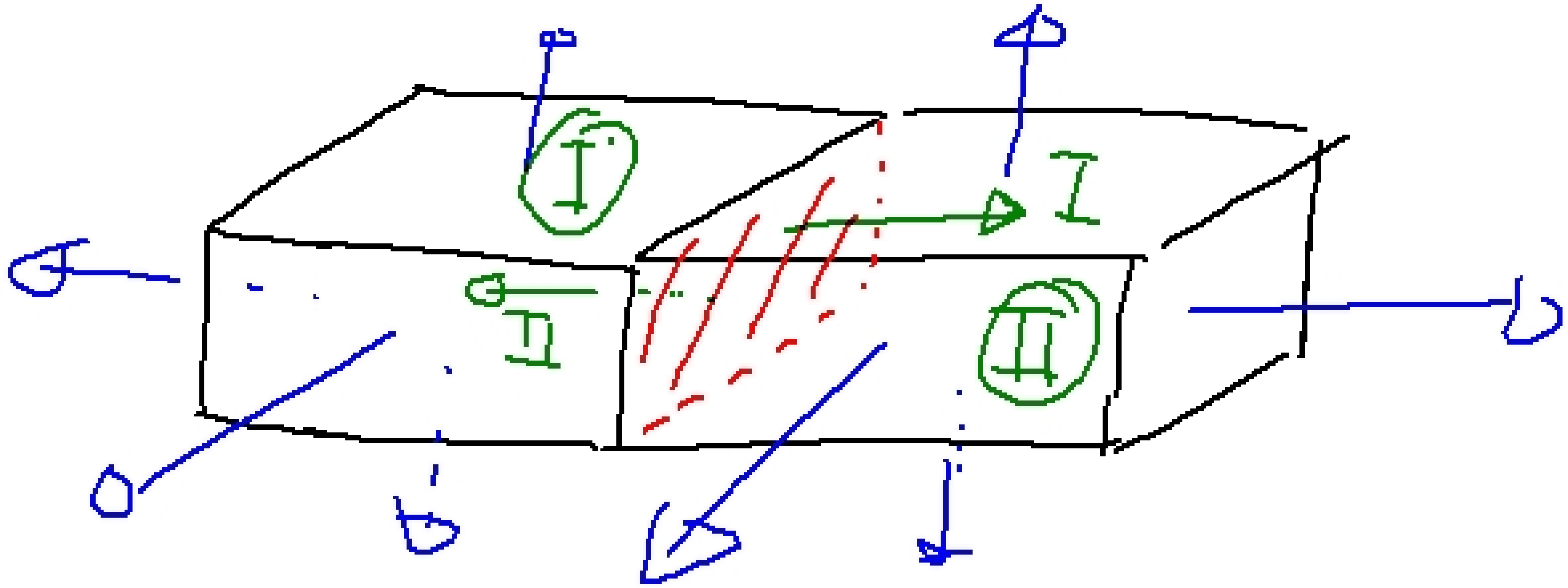
Lösn: $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Ex/övn: Bestäm $\operatorname{div} \vec{F}$ då

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 2x$$



Eftersom flödet i riktning $\xrightarrow{I}$ tar ut flödet i riktning $\xleftarrow{II}$ så blir flödet hos det sammansatta råtblocket summan av flödena hos de bägge råtblocken.

Om vi så delar in en allmän kropp i små råtblock och summerar blir summan av flödena - flödesintegralen

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(r)\, d\sigma$$

och då flödet hos varje litet

volymen hos det lilla rätblocket

rätblock är $\operatorname{div} \vec{F} \Delta V$ borde

vi ha att det totala flödet

blir

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})\, dx\,dy\,dz$$

<u>Gauss sats:</u> Låt $\vec{F}$ vara ett fält med kontinuerliga derivator i K och antag att ∂K är styckvis regulär. Då är

$$\oiint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma = \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\,dx\,dy\,dz$$

där $\hat{n}$ är den utåt riktade normalen.

Vi kan också skriva

$$\pm \oiint_{\partial K} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \iiint_K \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

(Hemläxa: läs beviset)

Ex/övn: Låt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ och

beräkna $\displaystyle\oiint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$

då Σ är enhetssfären

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lösn: Gauss sats säger att

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} 3\, dx\,dy\,dz = 3 \cdot \text{Volymen hos enhetsklotet}$$

$$= 4\pi$$

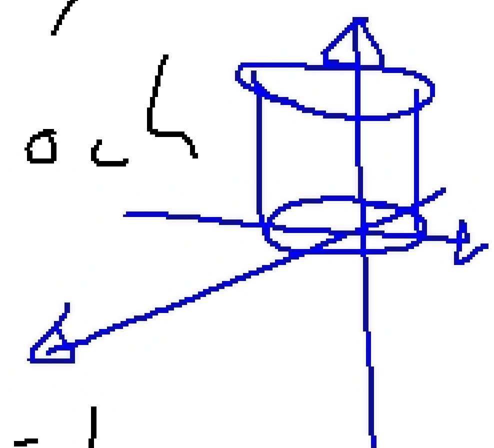
Vi ser att volymen hos en kropp K ges av

$$\frac{1}{3} \oiint_{\partial K} \vec{r} \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma .$$

Ex/övn: Låt $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, yz, xy)$

och beräkna $\displaystyle\oiint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$

där Σ är ytan hos en cylinder-formad plåtburk med lock och botten och radie 1, höjd 2.



Lösn: Enl Gauss sats ska vi räkna

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})\, dx\,dy\,dz$$

Vi har att $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 2x + z$.

$$\iiint_K 2x + z \, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r\cos\varphi + z) r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^3\cos\varphi}{3} + \frac{zr^2}{2} \right]_0^1 d\varphi\, dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\varphi}{3} + \frac{z}{2}\, d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{2\sin\varphi}{3} + \frac{z\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} dz = \int_0^2 \pi z\, dz = \left[\frac{\pi z^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{2}$$

$$= 2\pi.$$