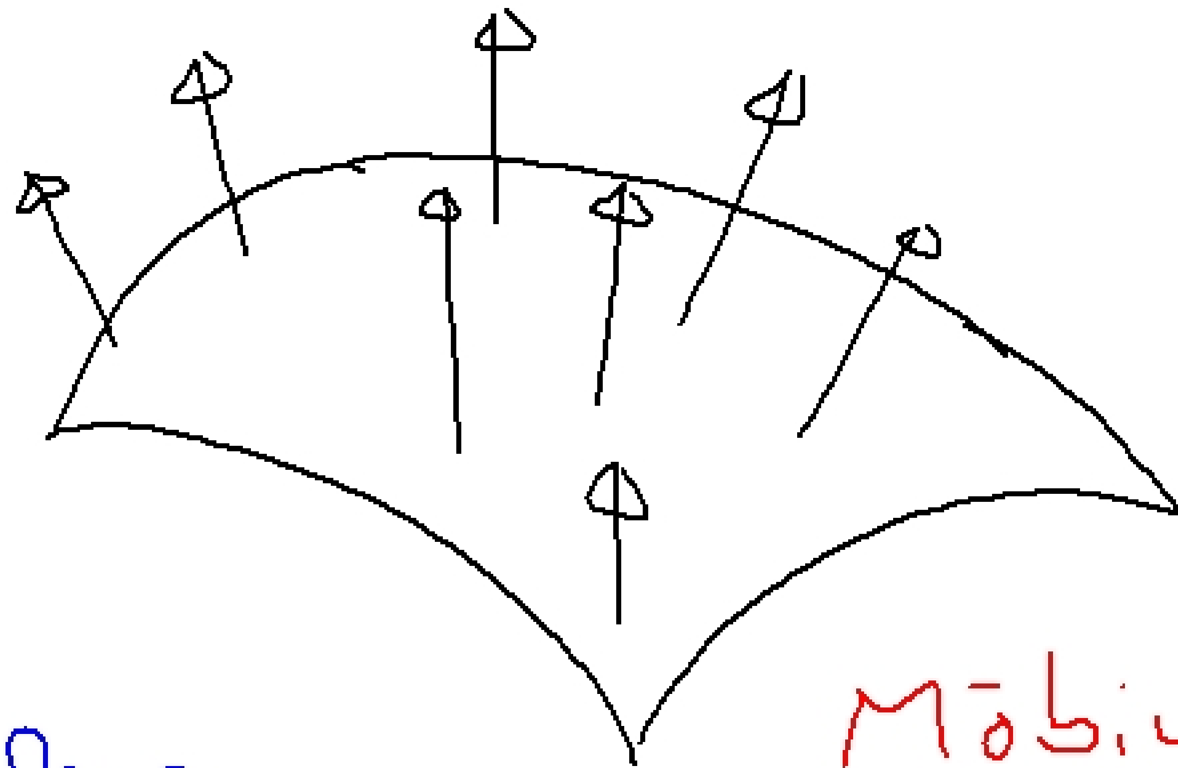
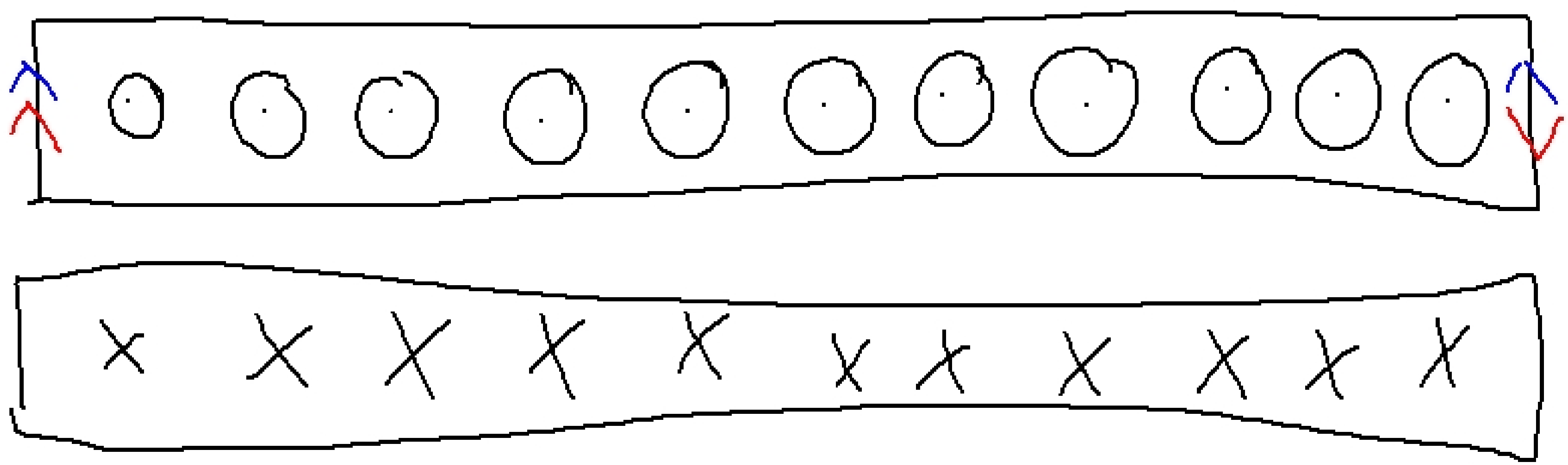
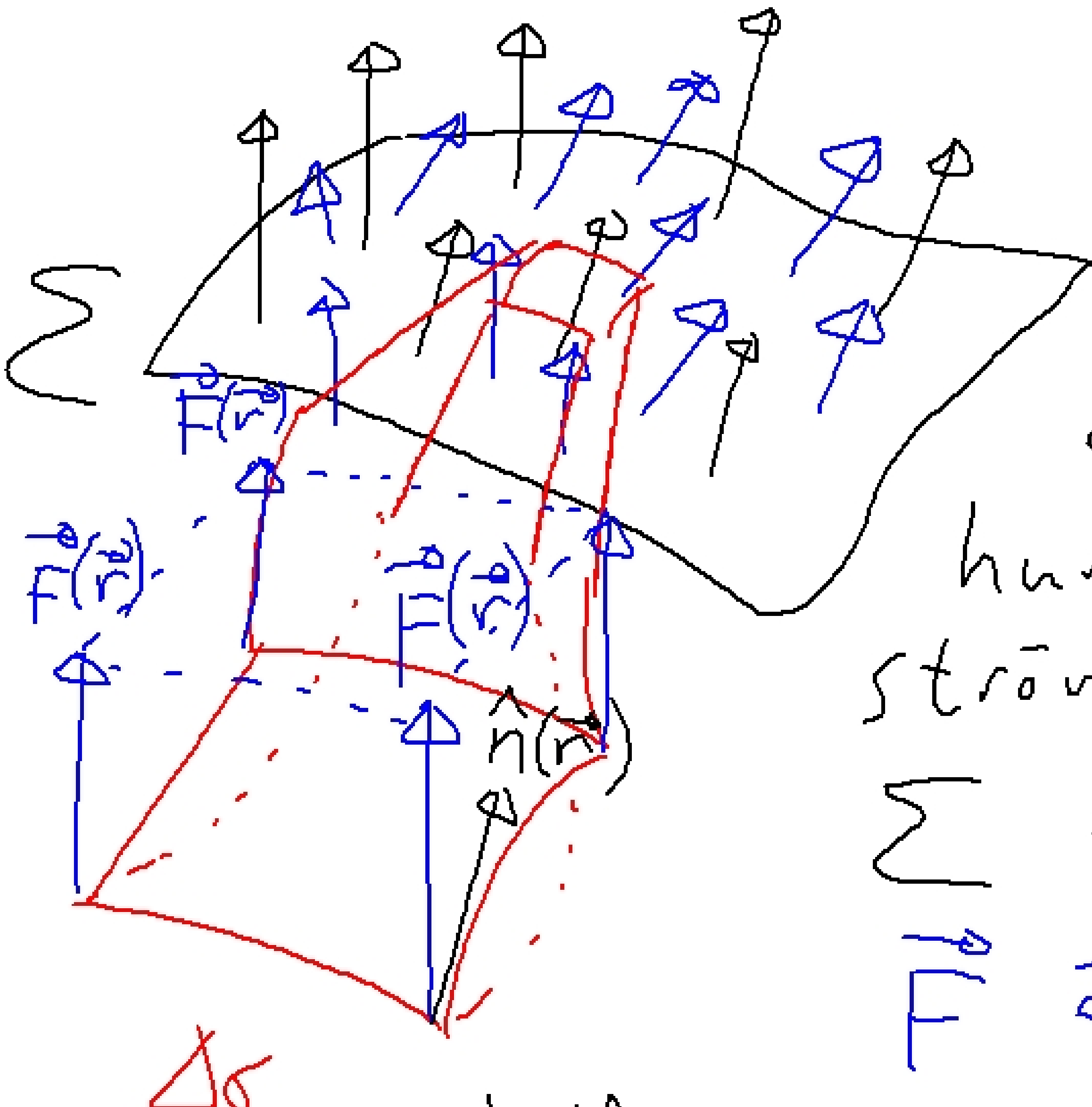
Orienterbarhet



Cylinder
orienterbar

Möbius band
ikke orienterbar





Betrakta en gas och undersök hur mycket som strömmar genom Σ per tidsenhet.

$\vec{F}$ är hastighetsfältet

Se bild sid 284

Volymen blir $\vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \Delta\sigma$

Summerar vi över en allt finare indelning och går i gräns får vi ytintegralen

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$$

$\hat{n}(\vec{r})$ är enhetsnormalen

Om Σ är en parameteryta given av $\vec{r}(u,v)$ för u,v i något område D, så kan ytintegralen beräknas som

$$\pm \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \, du\, dv$$

där tecknet väljs så att

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ pekar i samma riktning

som $\hat{n}(\vec{r}(u,v))$

Vi har tidigare sett att normalen till en parameteryta ges av $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$

Så enhetsnormalen ges av

$$\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$

men vi har också sett att ytelementet $d\sigma$ ges av

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

så

$$\hat{n}(r)\,d\sigma = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,du\,dv$$

Vi kan skriva

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

så om

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

blir

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) d\sigma = \pm \iint_{D} \left(P \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \right.$$

$$\left. + R \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du\,dv = \pm \iint_{D} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$$

Ex/övn: Beräkna $\iint_{\Sigma} (1,0,0)\cdot\hat{n}\, d\sigma$

då Σ är enhetssfären

$x^2+y^2+z^2=1$ och $\hat{n}$ är den

utåtriktade enhetsnormalen.

$\left(\vec{r}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \right.$

$\left. 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta)$$

eftersom $\cos\theta\sin\theta \geq 0$ när $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

och $\cos\theta\sin\theta \leq 0$ när $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

så är $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ riktad ut från sfären.

Det vi ska räkna blir alltså

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\varphi \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 0.$$

Ex/övn: Vad blir $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma$

då $\vec{F} = (0, 0, f(x,y))$, $\hat{n} = (0,0,1)$

och Σ ges av $\vec{r}(x,y) = (x, y, 0)$?

$x, y \in \Omega$

Lösn:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$$

$$\iint_{\Omega} (0,0,f(x,y)) \cdot (0,0,1) \, dx dy = \iint_{\Omega} f(x,y) \, dx dy$$

Funktionsgrafer:

Om vi har Σ given av $\underbrace{z=f(x,y)}_{\text{en graf}}$

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$$

så

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$$

vilket ger att ytintegralen

$$\iint_{\Sigma}\vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})\,d\sigma=\pm\iint_{D}(P,Q,R)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)dx\,dy=$$

$$= \pm \iint_D -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \, dx\,dy$$

Ex/övn: Beräkna flödet för fältet $(0,0,1)$ genom halvsfären $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$. $\left(z=\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$

Lösn:
$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy = \pi$$