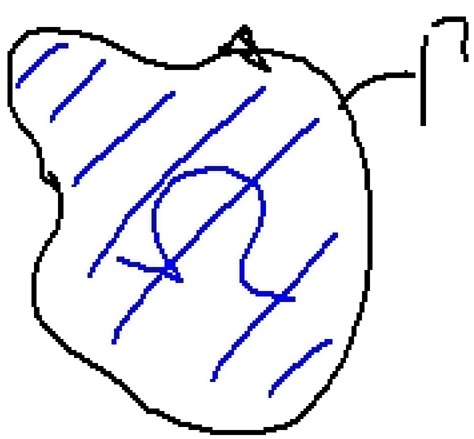
Sats (Greens formel):

Låt Γ vara en enkel, sluten kurva av ändlig längd som genomlöps i positiv led och som är randen till ett område Ω. Antas att $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ alla är kontinuerliga i Ω, då gäller



$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Ex/Övn: Låt $\Gamma = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2=1\}$ och beräkna $\oint_\Gamma -y\,dx + x\,dy$.

Lösn: Förutsättningarna för att använda Greens formel är uppfyllda så vi får

$$\oint_\Gamma \underbrace{-y}_{P}\,dx + \underbrace{x}_{Q}\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} 2\,dx\,dy = 2\pi$$

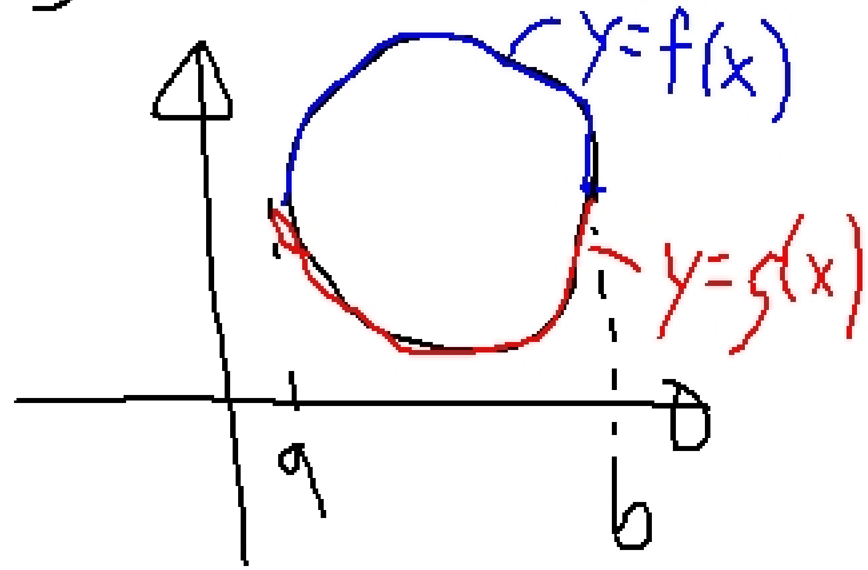
Kor: Om Γ och Ω är som i satsen blir

$$\oint_{\Gamma} -y\,dx + x\,dy = 2 \text{ Arean av } \Omega.$$

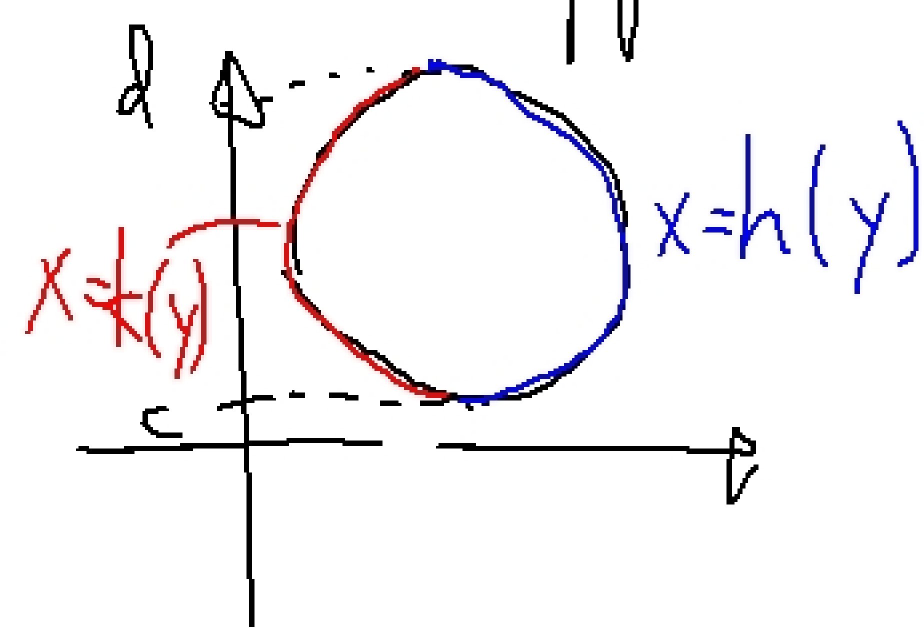
Bevis av Greens formel:

Antag att Γ kan delas upp

som



och



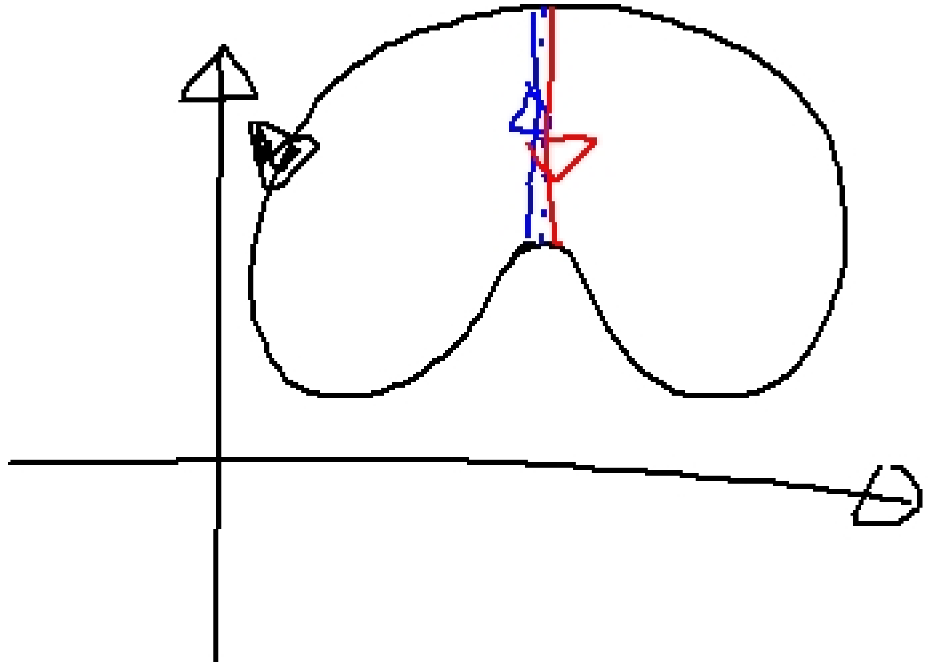
Dim blir

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \oint_\Gamma P\,dx + \oint_\Gamma Q\,dy$$

$$= \int_a^b P(x,g(x)) - P(x,f(x))\,dx +$$

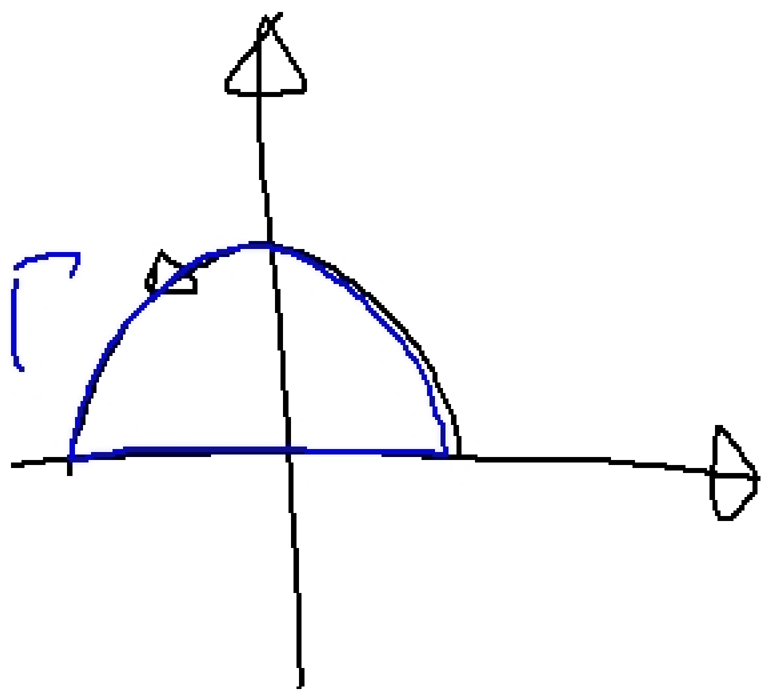
$$+ \int_c^d Q(h(y),y) - Q(k(y),y)\,dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right) dx + \int_c^d \left(\int_{k(y)}^{h(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \right) dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$



Ex/Övn: Beräkna $\oint_\Gamma x\,dx + xy\,dy$

då



$$= \iint y\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx = \frac{2}{3}$$

Def: Låt $\vec{F}$ vara av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dvs ett vektorfält, definierad i ett sammanhängande öppet område D. Om linjeintegralen

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

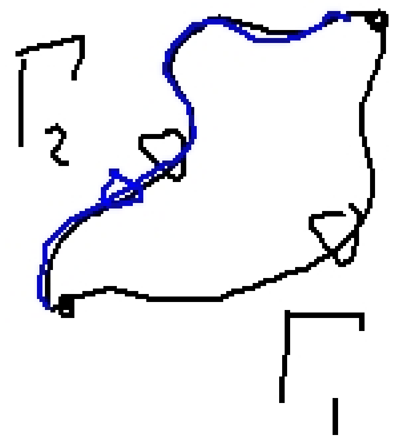
är oberoende av val av väg $\Gamma \subseteq D$, mellan givna start- och slutpunkter, kallas fältet konservativt.

Sats: Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält i ett öppet, sammanhängande område D. Då är följande ekvivalent

i) $\vec{F}$ är konservativt

ii) $\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva i D.

iii) Fältet har en potential, dvs en funktion $U(\vec{r})$ av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sådan att $\operatorname{grad} U(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$

bevis: 

$$\int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0 \quad \text{enl iii}$$

så $$\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}.$$

i) ⇒ iii) antas $\vec{F}$ konservativt

och sätt $$U(\vec{p}) = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

då blir

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Om $\vec{F} = (P, Q)$ får vi

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h P(x+t, y)\, dt = P(x,y).$$

P.s.s. får vi $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.

iii) $\Rightarrow$ i)

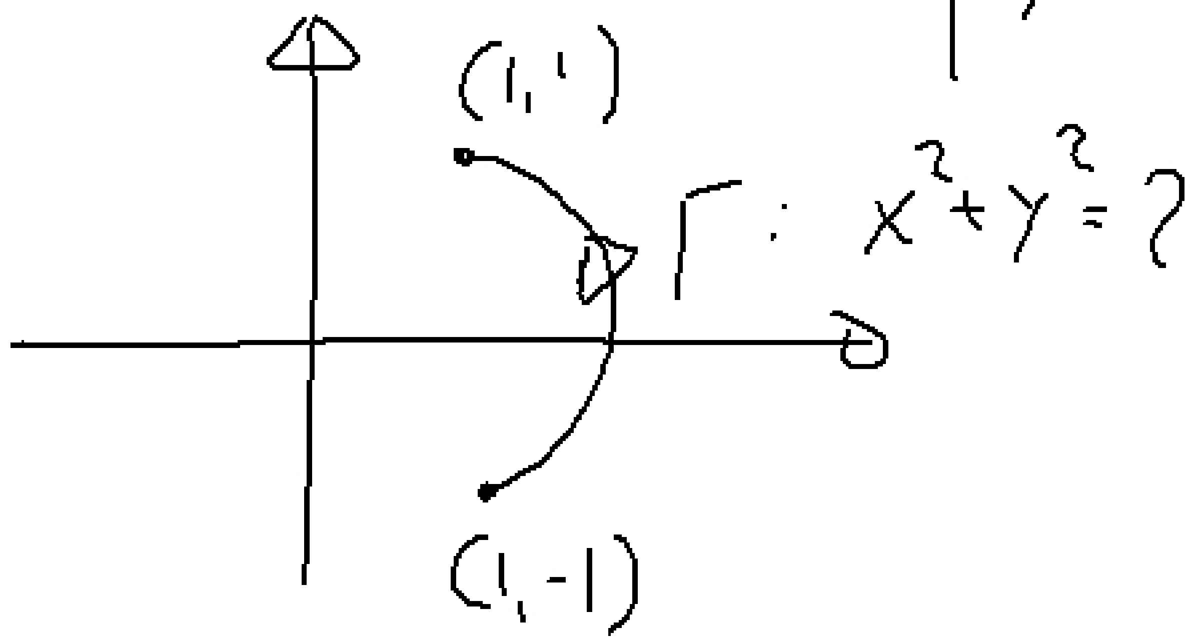
$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \operatorname{grad} U(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \operatorname{grad} U(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t))\, dt = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a))$$

så $\vec{F}$ är konservativt.

Ex/Övn: Beräkna $\int_\Gamma y\,dx + x\,dy$

då



Sök $U(x,y)$ så att $\frac{\partial U}{\partial x} = y$, $\frac{\partial U}{\partial y} = x$.

Lösn $U(x,y) = xy$ så

$$\int_\Gamma y\,dx + x\,dy = U(1,1) - U(1,-1) = 1+1 = 2.$$

Sats: Om $\vec{F} = (P, Q)$ är konservativt och P, Q, har kontinuerliga partiella derivator, så gäller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Bevis: Om $\vec{F} = \operatorname{grad} U$ så är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0$$

Ex: Kan fältet $(-y, x)$ vara konservativt?

Nej! för $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \neq 0.$

Om fältet $(-y, x)$ hade en potential U skulle vi ha

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -y \;, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x$$

$$\Downarrow$$

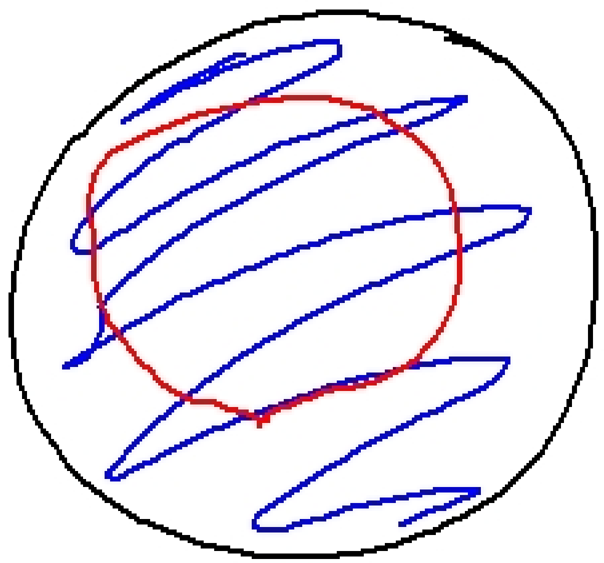
$$U = xy + g(x)$$

$$\Downarrow$$

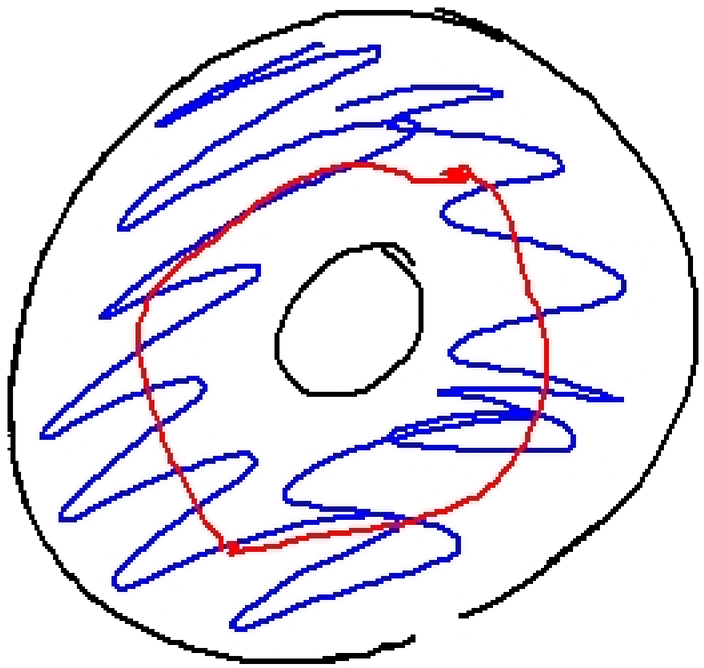
$$\frac{\partial U}{\partial x} = y + g'(x) \neq -y .$$

Så det finns ingen potential U.

Def: Enkelt sammanhängande



enkelt sammanhängande



sammanhängande men ej enkelt sammanhängande

Sats: Om villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ är uppfyllt i ett enkelt sammanhängande område Ω så är fältet (P,Q) konservativt i Ω.

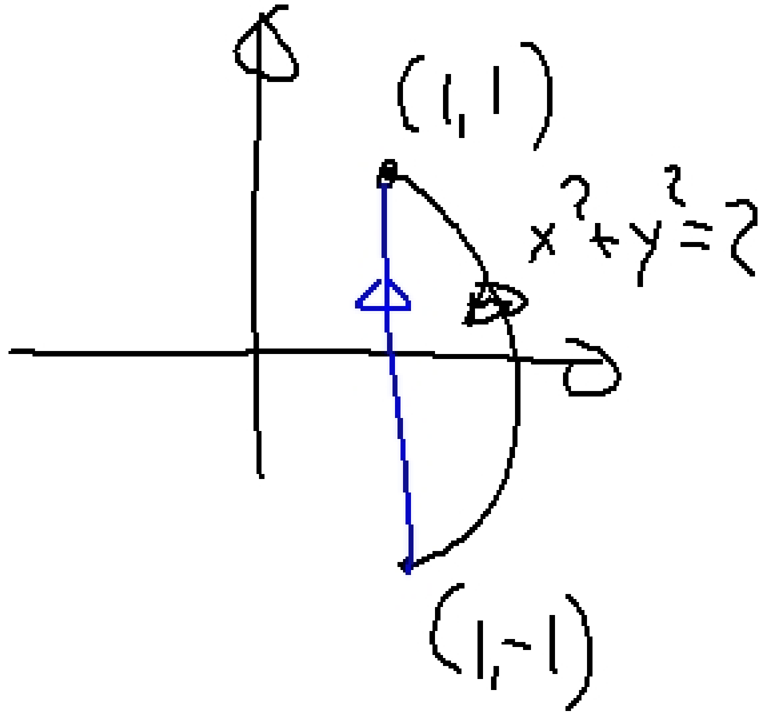
Bevis: följer av Greens formel.

Ex/övn: Visa att fältet (y,x) är konservativt i hela planet.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

Ex/övn: Beräkna $\int_{\Gamma} y\,dx + x\,dy$

där Γ



$\vec{F}(x,y) = (y, x)$

genom att gå längs $\tilde{\Gamma}$.

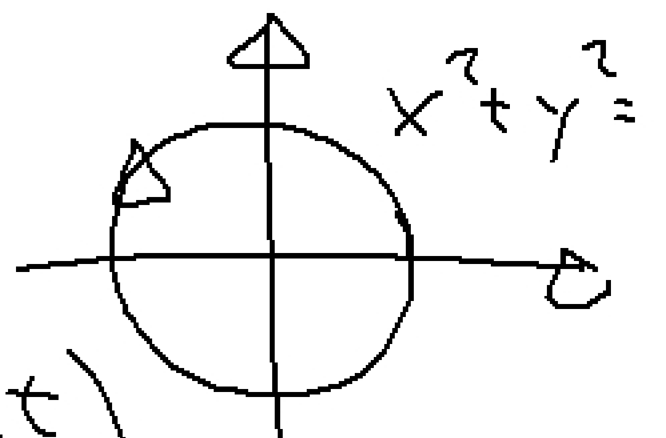
$\tilde{\Gamma} = \{ \underbrace{(1,t)}_{\vec{r}(t)} ; -1 \le t \le 1 \}$

$$\int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t,1) \cdot (0,1)\,dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

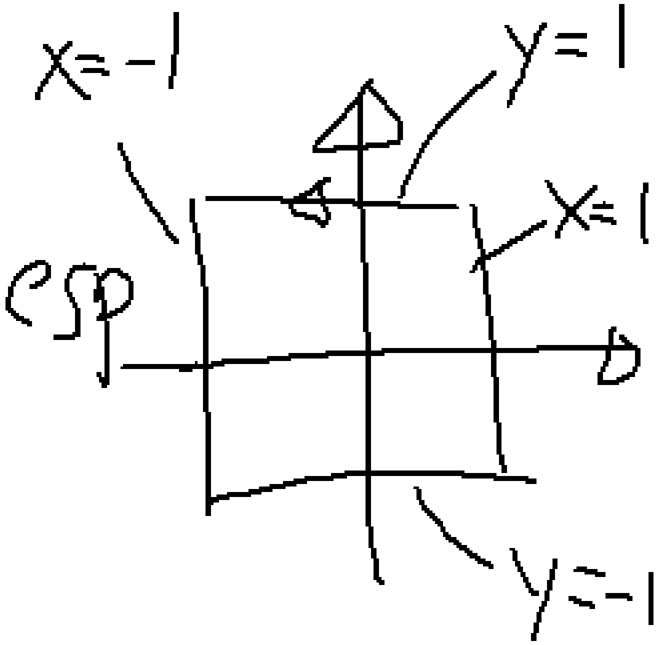
Ex/övn: Beräkna

$$\oint_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

där Γ



resp



$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

○ $\displaystyle\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = 2\pi$

□ $\displaystyle 2\int_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2} + 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 4\Big[\arctan x\Big]_{-1}^{1} = 2\pi$