Ex/övn: Bestäm volymen hos ellipsoiden $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$.

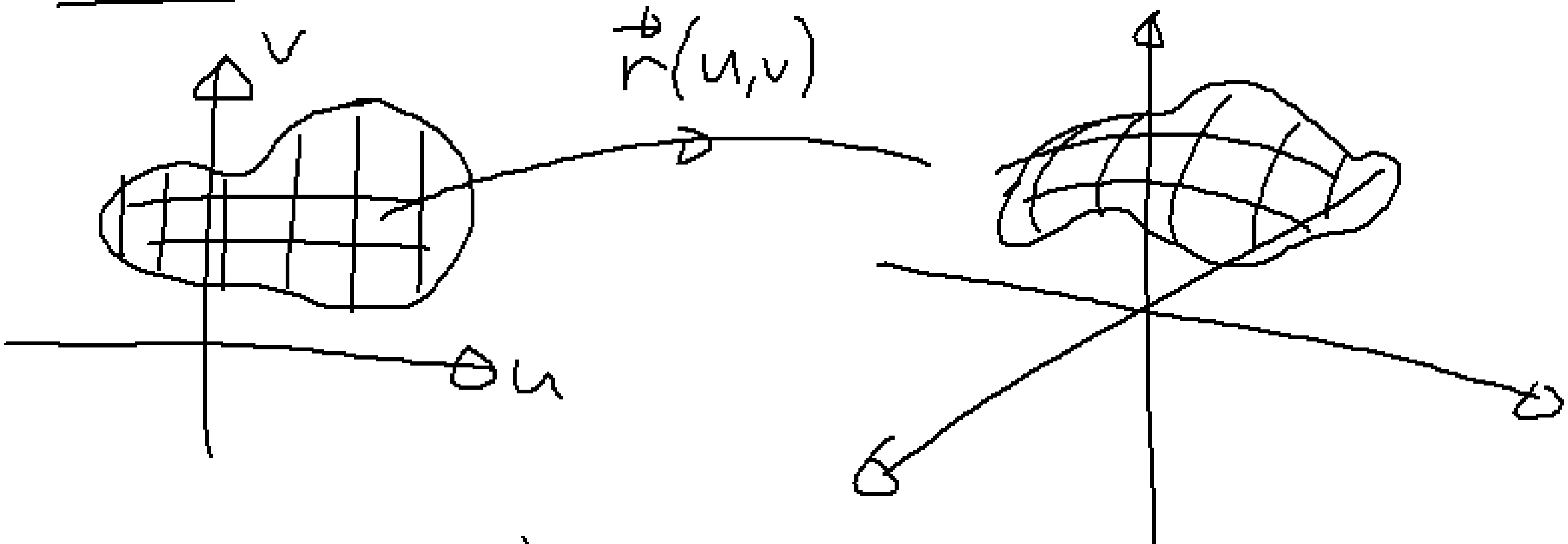
$$T^{-1}: \begin{cases} u = \frac{x}{a} \\ v = \frac{y}{b} \\ w = \frac{z}{c} \end{cases} \qquad u^2+v^2+w^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow T: \begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \quad \text{så } |\det J_T| = abc$$

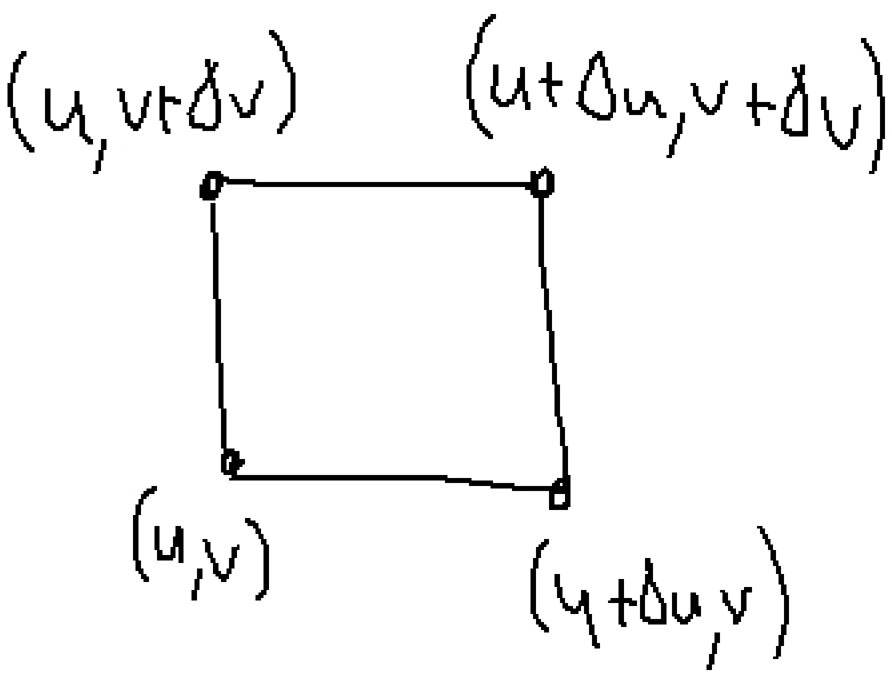
$$\iiint_K dx\,dy\,dz = \iiint_{K'} |\det J_T(u,v,w)|\,du\,dv\,dw =$$

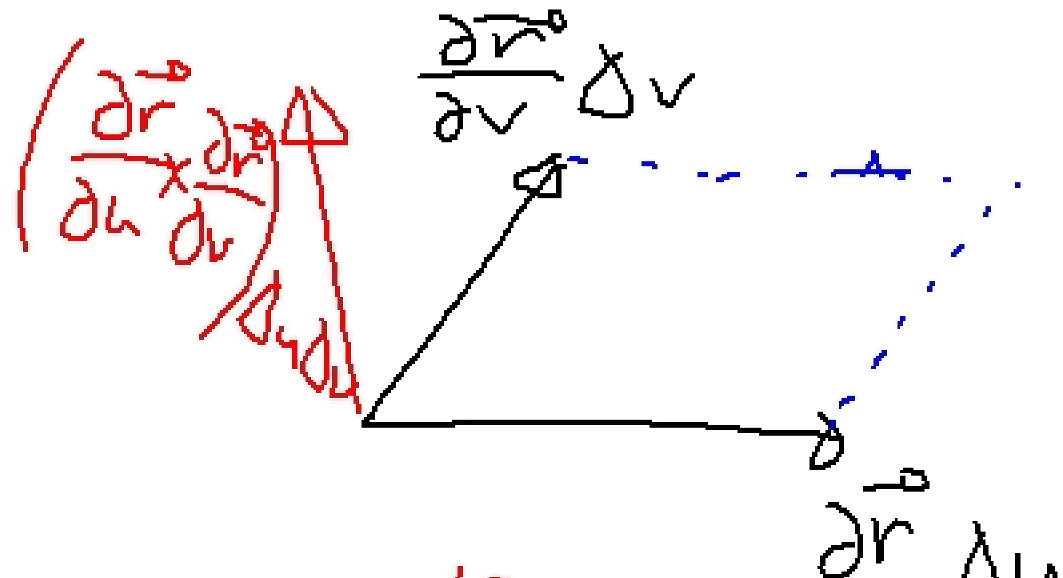
$$= abc \iiint_{K'} du\,dv\,dw = abc\,\frac{4\pi}{3}.$$

Area för parameterytor



$$\vec{r}(u+h, v+k) \approx \vec{r}(u,v) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} h + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} k$$





Area: $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v$

Så ytans area blir

$$\iint_{\Omega} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

Speciellt om ytan är en graf $z = f(x,y)$. Grafen kan ses som en parameteryta genom

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Så

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

vilket ger

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} .$$

Arean över området Ω blir alltså

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx dy .$$

Ex/övn: Beräkna arean hos cylindern $\vec{r}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ då $-1 \le v \le 1$, $0 \le u \le 2\pi$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0) \text{ så } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = 1$$

Arean blir därmed

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} du\,dv = 4\pi.$$

Ex/Övn: Beräkna arean hos den del av grafen $z = \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)}$ som uppfyller $z \le 1$.

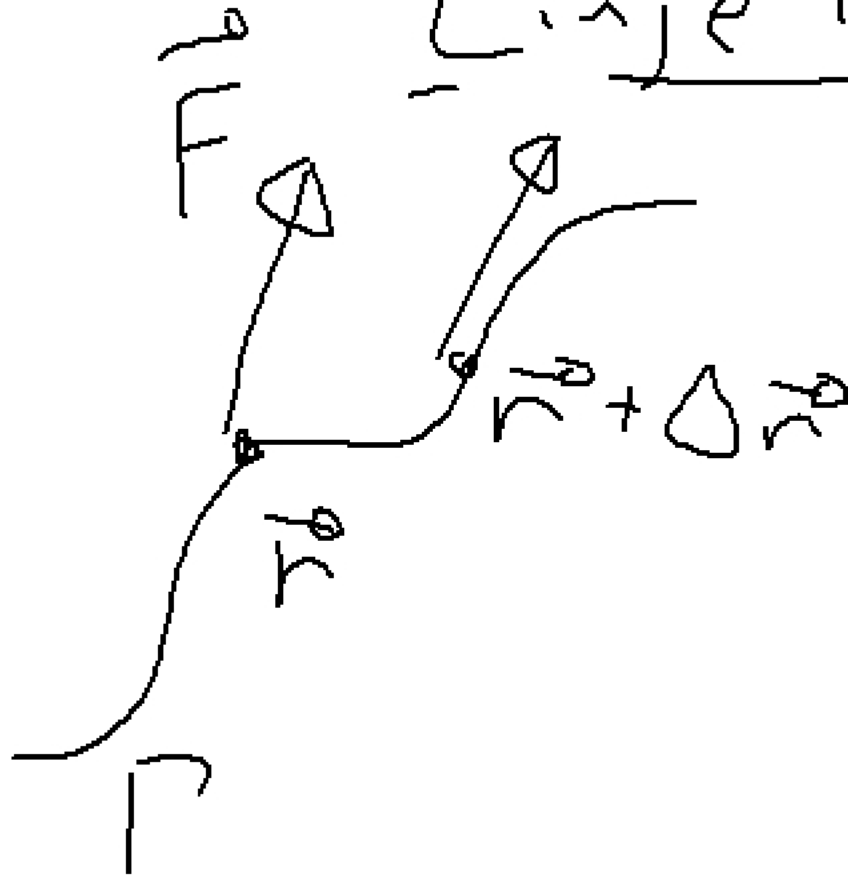
$$\iint_{\Omega} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\right)d\varphi = 2\pi\left[\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\,\frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{6}$$

Linje integraler



$\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}$ (arbete)

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$ (totala arbetet)

Om $\vec{F}=\big(P(x,y),\,Q(x,y)\big)$ och $d\vec{r}=(dx,dy)$

så blir

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Om $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$ är en parametrisering av Γ får vi

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left(P(x,y)\,x'(t) + Q(x,y)\,y'(t) \right) dt$$

Ex/övn: Beräkna $\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ då

$\vec{F}(x,y) = (x,y)$ och $\Gamma = (t,t)$, $0 \le t \le 2$.

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^2 (t,t)\cdot(1,1)\,dt =$$

$$= \int_0^2 t+t\,dt = 2\int_0^2 t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 4.$$

Ex/övn: Beräkna $\int \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ där

$\vec{F} = (x^2, xy)$ och Γ är parabeln

$y = x^2,\ 0 \le x \le 1.$

Γ ges av $(t, t^2),\ 0 \le t \le 1.$

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, t^3)\cdot(1, 2t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 + 2t^4\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{11}{15}$$

Om kurvans ändar går ihop skriver man

Γ

$$\oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}.$$

Sats (Greens formel):

Låt Γ vara en enkel, sluten kurva av ändlig längd som genomlöps i positiv led och som är randen till ett område Ω. Antag att $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ är kontinuerliga i Ω. Då gäller

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Ex/övn: Beräkna $\oint_\Gamma -y\,dx + x\,dy$

då Γ är enhetscirkeln

$x^2+y^2=1$.

Lösn: Enligt Greens formel är

$$\oint_\Gamma \underbrace{-y}_{P}\,dx + \underbrace{x}_{Q}\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 1+1\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy = 2\pi$$