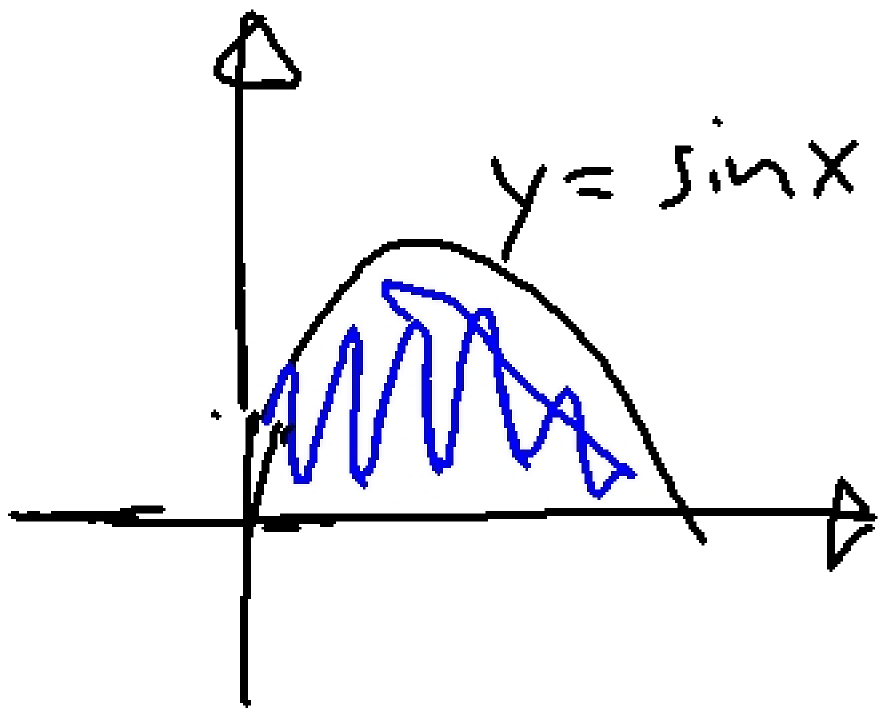
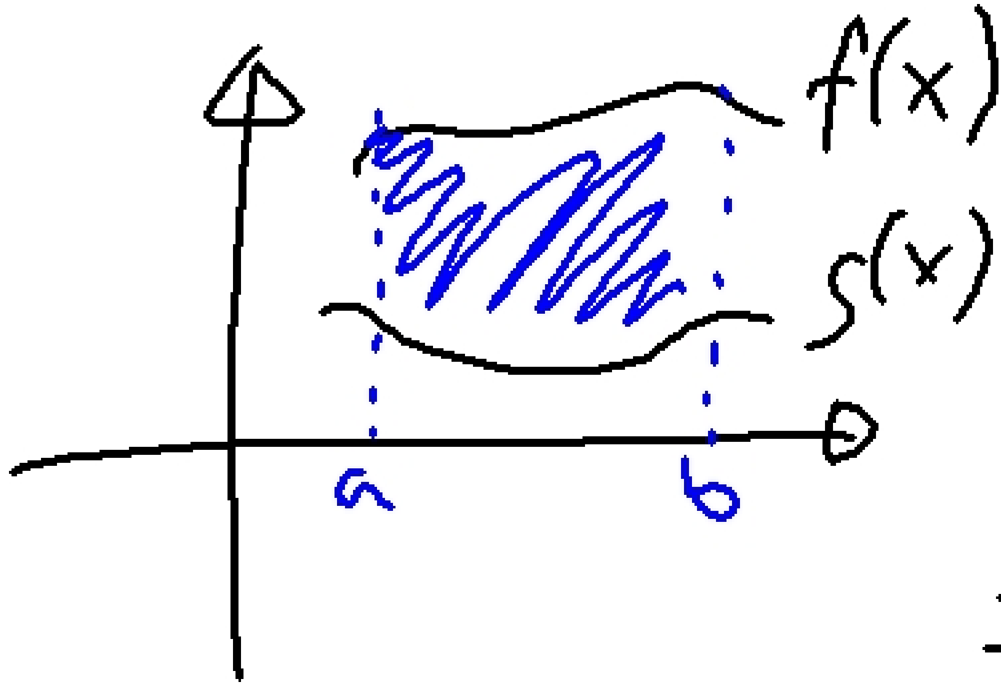
Arean hos ett område Ω ges av $\iint_\Omega dx\,dy$.



Arean hos [illegible] ges av $\int_0^\pi \sin x\,dx$

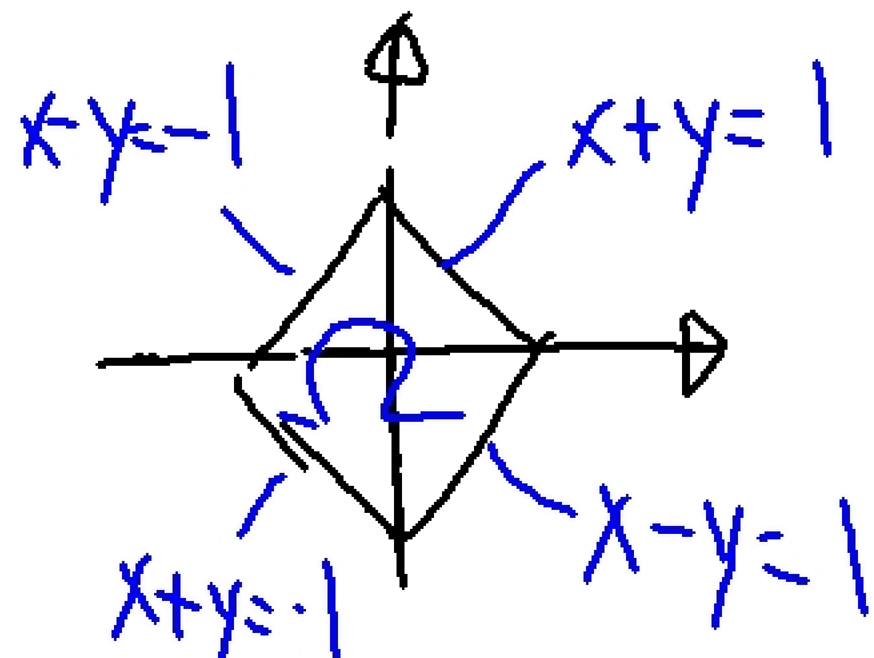
Vi har att $\iint_\Omega dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} dy \right) dx = \int_0^\pi \sin x\,dx$



$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} dy \right) dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

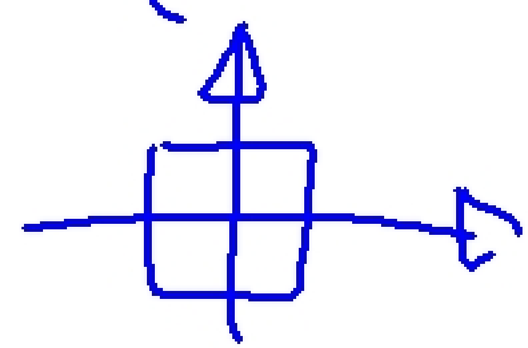
Ex/övn: Beräkna arean hos området

Ω



Sätt

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$



$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{\Xi} \left|\det J_T(u,v)\right| du\,dv$$

$d\,\bar{<}\,r \quad T(u,v) = (x,y).$

$$T^{-1}: \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Longrightarrow T: \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \left|\det J_T\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\Xi} du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} du\,dv = \frac{4}{2} = 2$$

Ex/övn: Bestäm arean hos en cirkelskiva med radie R.

$$T: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{\tilde{\Omega}} |\det J_T(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi$$

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad |\det J_T| = r$$

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{\tilde{\Omega}} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right)d\varphi = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Ex/övn: Beräkna

$$\iint_\Omega \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

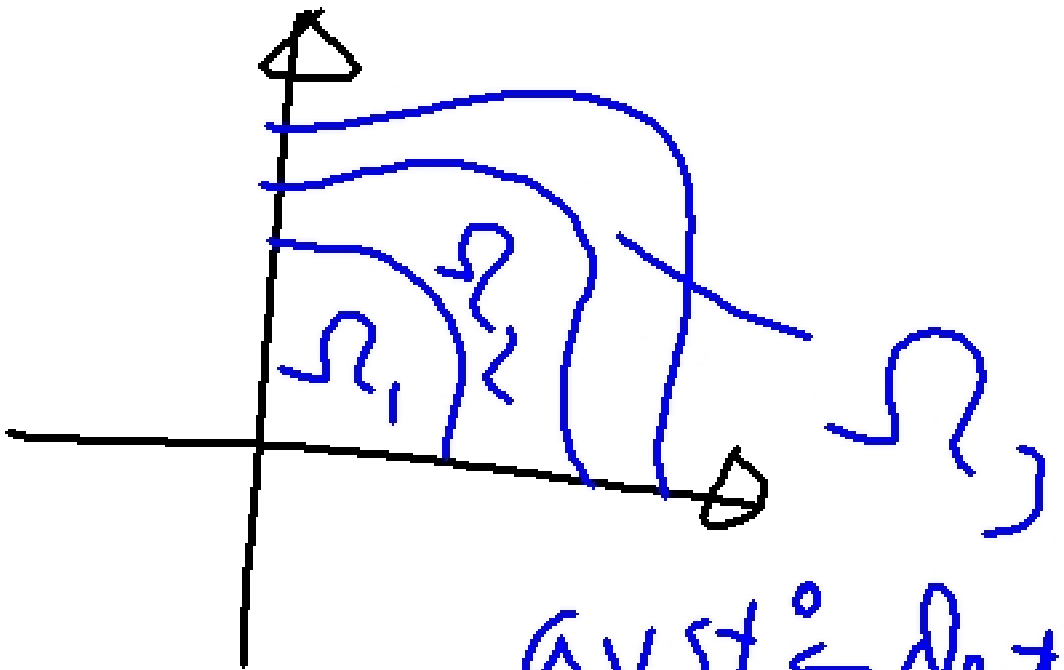
där $\Omega = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \le 1\}$.

$$T = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad |\det J_T| = r$$

$$\iint_E \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right)d\varphi = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \pi(\ln 2 - \ln 1) = \pi \ln 2.$$

Generaliserade dubbelintegraler



$\Omega \doteq \{(x,y);\ x \geq 0, y \geq 0\}$

obegränsat område

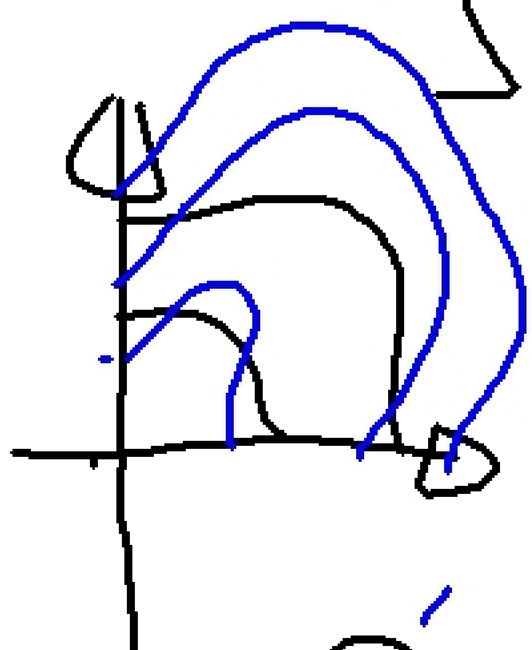
$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3 \subseteq \dots \quad \Omega$

avståndet till origo för punkter i $\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}$ går mot oändligheten.

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{i\to\infty} \iint_{\Omega_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

Om gränsvärdet existerar och är oberoende av val av uttömmande följd Ω_i

Om $f \geq 0$ så existerar gränsvärdet (men kan vara ∞) och är oberoende av följd.

Ω_i  Ω_i'

Tänk på detta!

Det finns Ω_j' så att $\Omega_j \supseteq \Omega_i^{(\prime)}$

så $\lim \iint_{\Omega_i} f(x,y)\,dx\,dy \geq \lim_i \iint_{\Omega_i'} f(x,y)\,dx\,dy$

$\leq$

Sats: Om $(f \geq 0)$ och någon av de upprepade enkelintegralerna

$$\int_A \left(\int_{B_x} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{och} \quad \int_B \left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

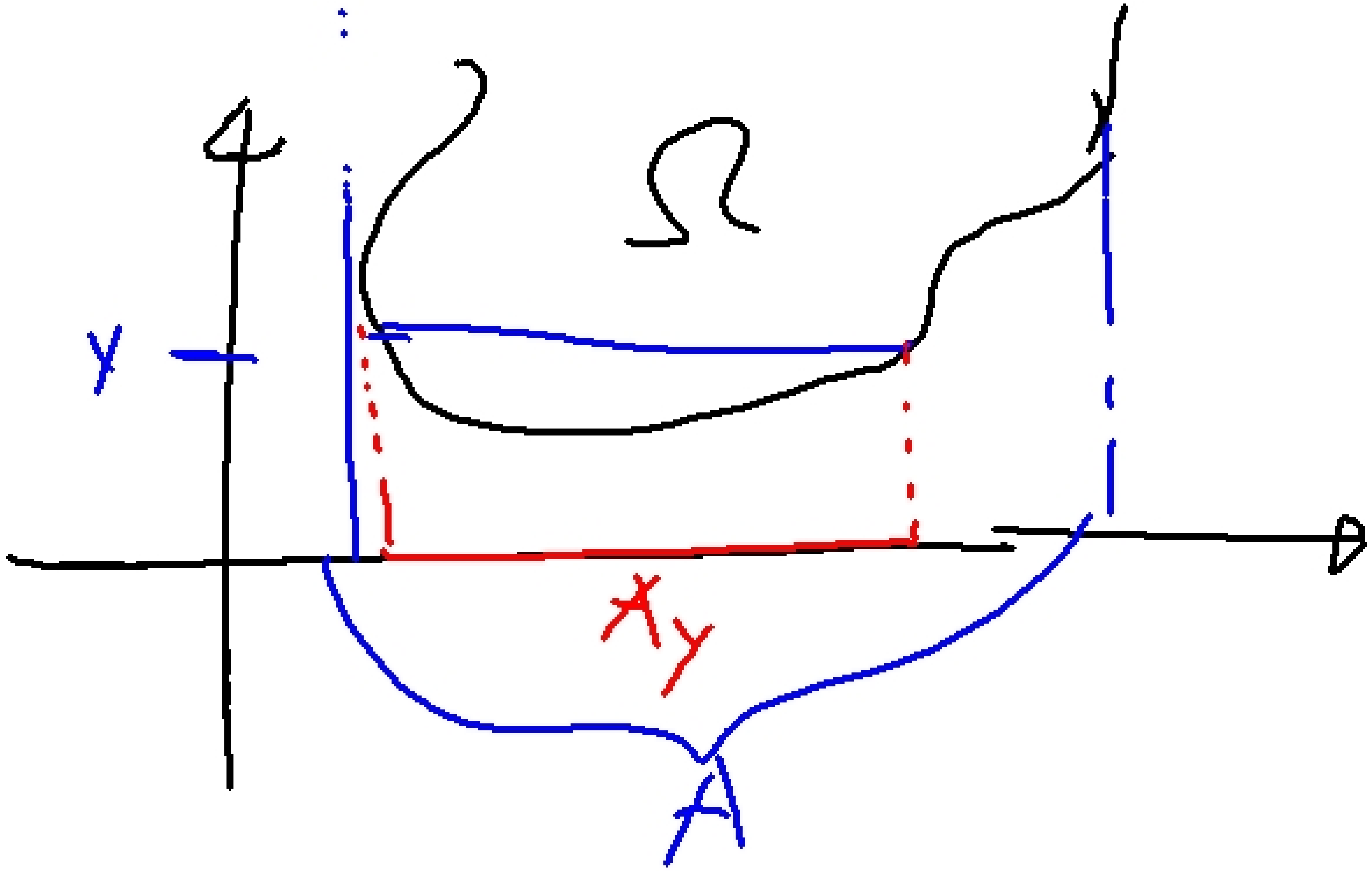
där $A = \{x ;\ (x,y) \in \Omega \text{ för något } y\}$

$B = \{y ;\ (x,y) \in \Omega \text{ för något } x\}$

$A_y = \{x ;\ (x,y) \in \Omega,\ y \text{ fixt}\}$

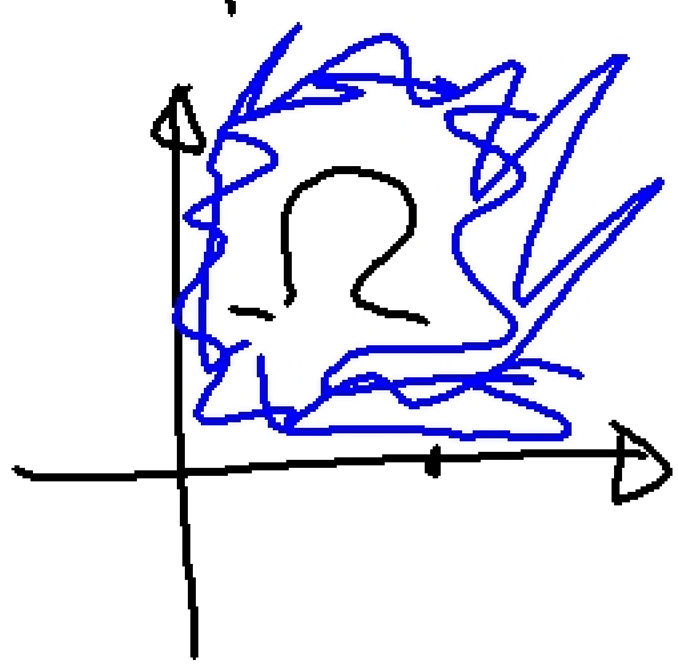
$B_x = \{y ;\ (x,y) \in \Omega,\ x \text{ fixt}\}$

existerar så är de $= \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$



$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

Ex/övn: Beräkna $\iint_\Omega e^{-x-y}\,dx\,dy$ då



$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-y}\,dy \right) dx$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-y}\, dy \right) dx = \int_0^\infty \left[-e^{-x-y} \right]_0^\infty dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x} \right]_0^\infty = 1$$

Sats: $\iint_\Omega f\, dx dy$ konvergent

$\Longleftrightarrow$ $\iint_\Omega |f|\, dx dy$ konvergent

Begreppsuppgift

Förklara vad som menas med en sammanhängande mängd och vad som skiljer de två sammanhängande mängderna nedan