Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-01-21

En rät linje kan skrivas på:

- Vektorform: $\vec{v}_0 + t\,\vec{v}$ (startpunkt, riktningsvektor)
- Parameterform
- Normalform

Om A är en linjär avbildning i $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $A\left(\vec{v}_0 + t\,\vec{v}\right) = A\,\vec{v}_0 + A\left(t\,\vec{v}\right) = A\,\vec{v}_0 + tA\,\vec{v}$
Resultatet är en ny linje med startpunkt $A\,\vec{v}_0$ och riktningsvektor $A\,\vec{v}$.
En linjär avbildning "tar linje till linje".

Låt l_1 och l_2 vara två parallella linjer i planet: $l_1 = \vec{v}_1 + t\,\vec{v}$, $l_2 = \vec{v}_2 + s\,\vec{v}$
Under den linjära avbildningen A tas linjerna till: $A\,l_1 = A\,\vec{v}_1 + tA\,\vec{v}$, $A\,l_2 = A\,\vec{v}_2 + sA\,\vec{v}$
Vi ser att riktningsvektorerna blir samma, därmed är bildlinjerna också parallella.

Till varje linjär avbildning hör en matris, som beror på vilken bas man använder. Omvänt får man från en matris också en linjär avbildning.

Om **A** är en matris, låter vi A vara avbildningen som definieras av:

$$A\,\vec{v} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{om} \quad \vec{v} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 \quad \textit{där} \quad \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \quad \textit{är basen för } \boldsymbol{A},$$

$$\textit{dvs att: } \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill nu visa att avbildningen A är linjär, alltså att: $A\left(\vec{v} + \vec{u}\right) = A\,\vec{v} + A\,\vec{u}$, $A\left(k\,\vec{v}\right) = k \cdot A\,\vec{v}$
(Dessa två villkor gick vi igenom i första föreläsningen 2004-01-19.)

Bevis:

$$\textit{Låt} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \ \textit{då har vi: } A\left(\vec{v} + \vec{u}\right) = \boldsymbol{A}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\textit{och} \quad A\left(k\,\vec{v}\right) = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix} = k\,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{enligt ordinarie regler för matrismultiplikation.}$$

Övning:

Vad svarar den linjära avbildning som fås av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *mot geometriskt ?*

$$\textit{Svar: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + y \end{pmatrix} \quad \textit{Förskjutning i } y\textit{-led med } 2x.$$

Övning:

Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen för den linjära avbildningen som fås genom att först töja med en faktor 2 i y*-led* $(\vec{e}_2)$*, och sedan med en faktor 3 i* x*-led* $(\vec{e}_1)$.

$$\textit{Svar: } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}$$

Vi kallar den första töjningen för A och den andra för B: $C\,\vec{v} = B\left(A\,\vec{v}\right) = B \circ A\,\vec{v}$

$$\textit{Detta kan skrivas som: } \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (\boldsymbol{BA})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{så} \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}.$$

Sats: *Om C är den linjära avbildning som fås genom att sammansätta de linjära avbildningarna A och B så att vi först gör A och sedan B så fås* $C = B \circ A$ *avbildningsmatris* $\boldsymbol{C}$ *genom att multiplicera matricerna för B och A:* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BA}$.

I exemplet med töjningarna är $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, så $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, vilket stämmer med det vi skrev tidigare. I just det här fallet blir $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$ men det gäller *inte* i allmänhet eftersom matrismultiplikation är icke-kommutativ.

Övning:

Bestäm avbildningsmatrisen för den avbildning som fås genom att först rotera ed vinkeln $\frac{\pi}{4}$ *och därefter spegla i* y*-axeln. Bestäm även matrisen för den omvända operationen.*

$$\textit{Svar: Rotation med } \frac{\pi}{4}: \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\textit{Spegling i } y: \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (y\textit{-koordinaterna oförändrade})$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Den omvända operationen fås av:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Övning:

Låt $C = B \circ A$ *och* $D = A \circ B$ *där A är projektion på* x*-axeln och B är rotation med* $\frac{\pi}{2}$.
Bestäm avbildningsmatriserna för C respektive D.

$$\textit{Svar: } \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exempel (bild): Om vi har två vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ som spänner upp ett parallellogram Ω , hur stor är områdets area? Vi kan inte ta kryssprodukt rakt av eftersom vi är i planet, vi måste alltså flytta problemet till rummet (tre dimensioner): $\vec{v}_1 = \left(x_1, y_1, 0\right)$, $\vec{v}_2 = \left(x_2, y_2, 0\right)$

Nu kan vi beräkna arean: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, -0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

Svaret blir att omega (Ω) har orienterad area $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Allmänt: Låt nu A vara en linjär avbildning med matris **A**. Vi vill undersöka hur arean ändras under A. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ går till $A\,\vec{v}_1, A\,\vec{v}_2$ med koordinater:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,x_2 + a_{12}\,y_2 \\ a_{21}\,x_2 + a_{22}\,y_2 \end{pmatrix}.$$

Arean av det nya parallelogrammet ges av:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,y_1 & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,y_1 \\ a_{11}\,x_2 + a_{12}\,y_2 & a_{21}\,x_2 + a_{22}\,y_2 \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}\,x_1 + a_{12}\,y_1)(a_{21}\,x_2 + a_{22}\,y_2) - (a_{21}\,x_1 + a_{22}\,y_1)(a_{11}\,x_2 + a_{12}\,y_2) =$$

$$a_{11}\,a_{21}\,x_1\,x_2 + a_{11}\,a_{22}\,x_1\,y_2 + a_{21}\,a_{12}\,y_1\,x_2 + a_{12}\,a_{22}\,y_1\,y_2 -$$

$$a_{11}\,a_{21}\,x_1\,x_2 - a_{12}\,a_{21}\,x_1\,y_2 - a_{11}\,a_{22}\,y_1\,x_2 - a_{12}\,a_{22}\,y_1\,y_2 =$$

$$(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})(x_1\,y_2 - y_1\,x_2) = \det \boldsymbol{A} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\right)$$

Vi får alltså den nya arean genom att multiplicera avbildningsmatrisens determinant med den gamla arean. Observera att de mastiga beräkningarna ovan inte behöver utföras varje gång.

Slut för idag / it03_wsv@it.kth.se