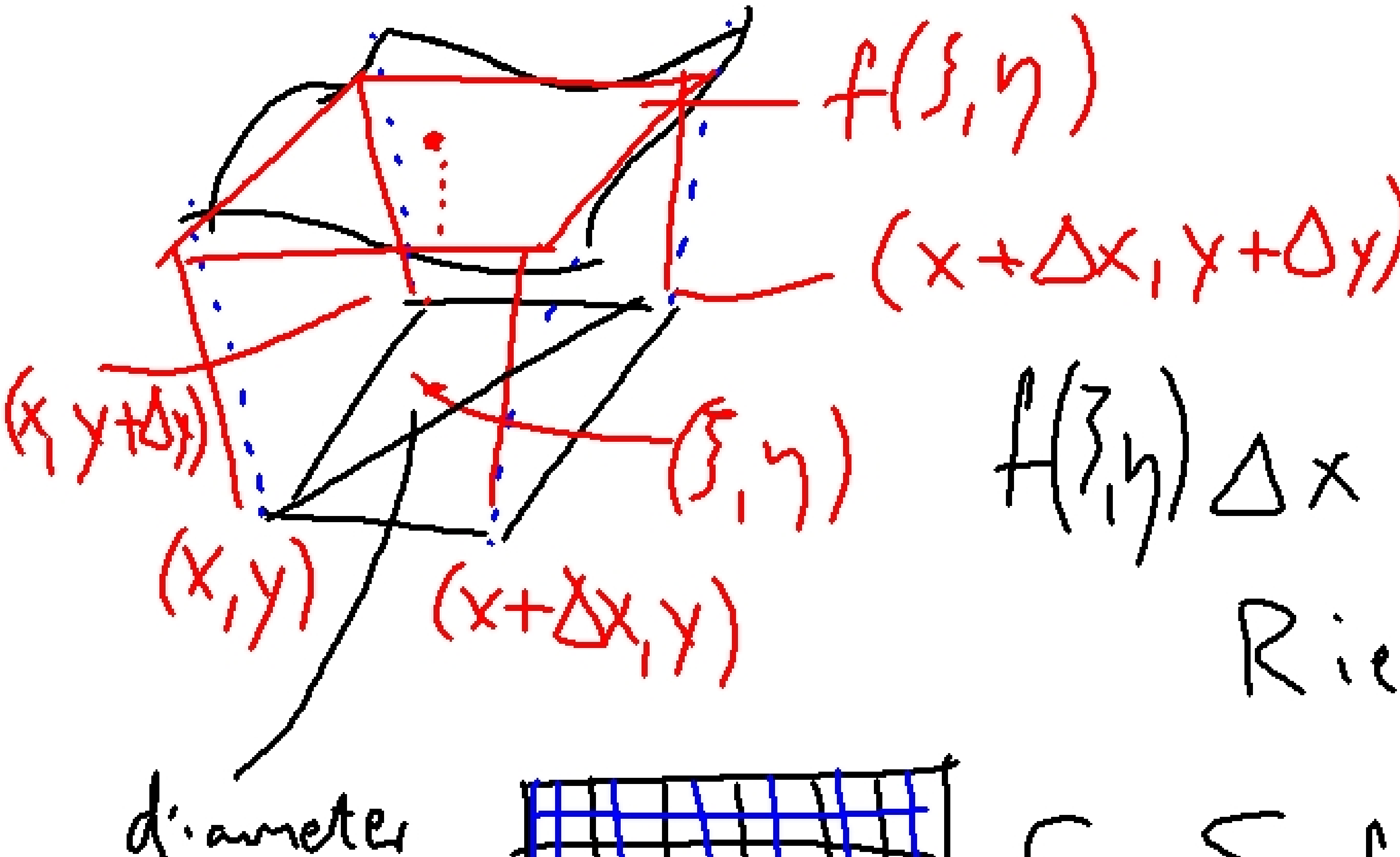
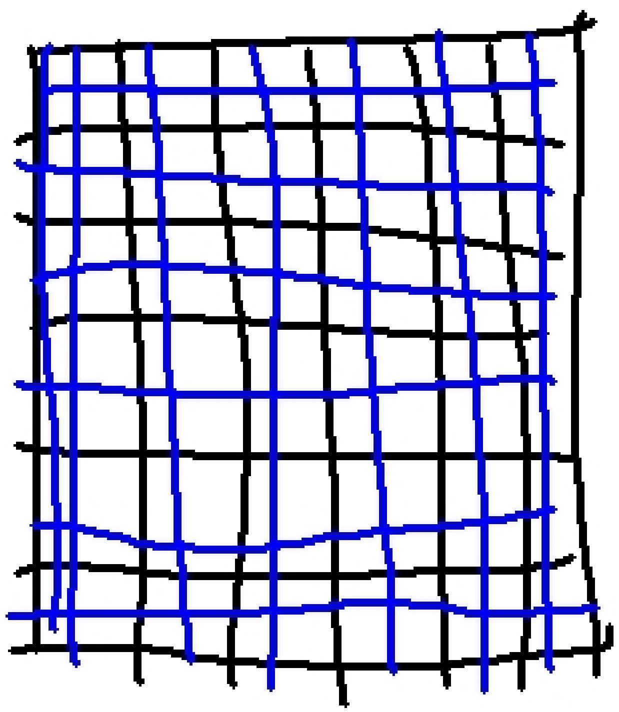
Dubbelintegral



$$f(\xi,\eta)\,\Delta x\,\Delta y$$

Riemannsumma



$$S_k = \sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k \quad \text{existerar}$$

__Def__: En funktion sägs vara Riemann integrabel om

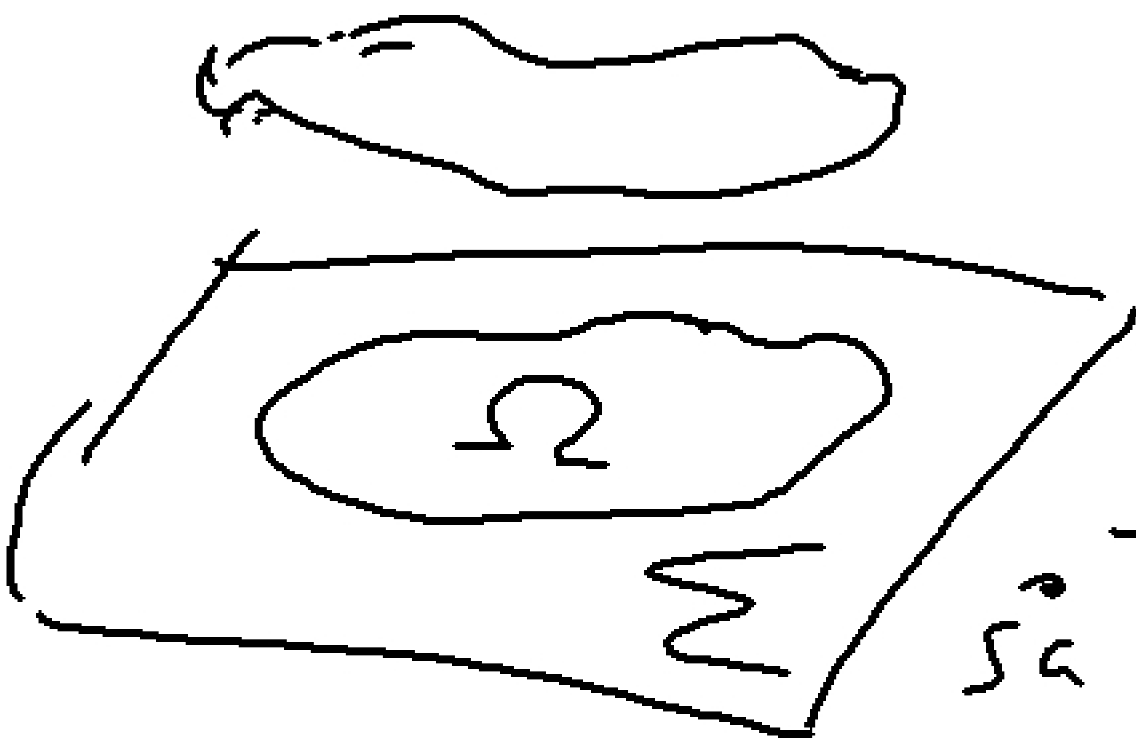
$\lim_{k\to\infty} S_k$ existerar

för varje indelning där diametern går mot noll.

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

Här är Ω en rektangel.

$\{(x,y);\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$



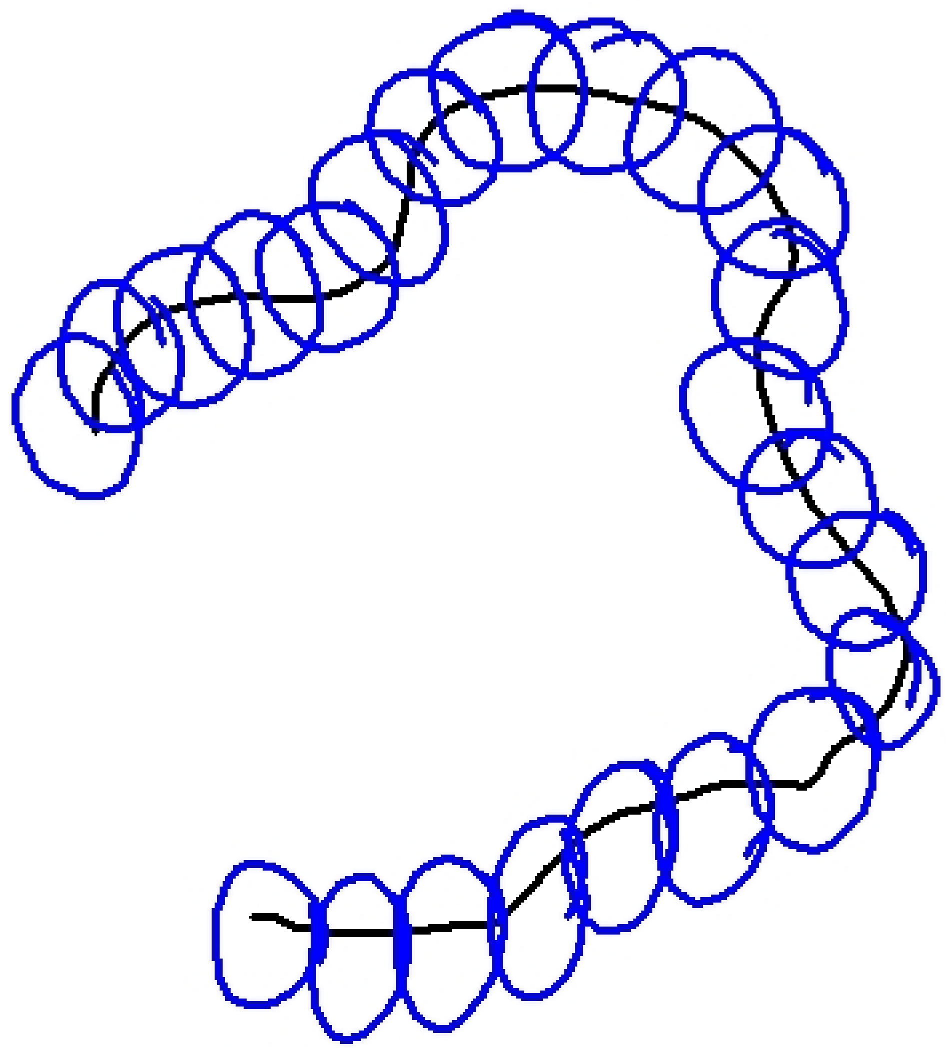
Om f är definierad i ett område Ω som inte är en rektangel så låter vi

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in\Omega \\ 0 & (x,y)\in\Sigma\setminus\Omega \end{cases}$$

och sätter

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\Sigma} F(x,y)\,dx\,dy$$

En funktion är kontinuerlig nästan överallt om den är kontinuerlig utom på en mängd med "mått noll".



Om totalarean hos cirkelskivorna går mot noll när radien går mot noll sägs mängden ha mått noll.

Sats: Om Ω är begränsat och randen ~~kurva~~ är styckvis regulär (medför speciellt att den har mått noll) och f är begränsad och kontinuerlig nästan överallt i Ω så existerar

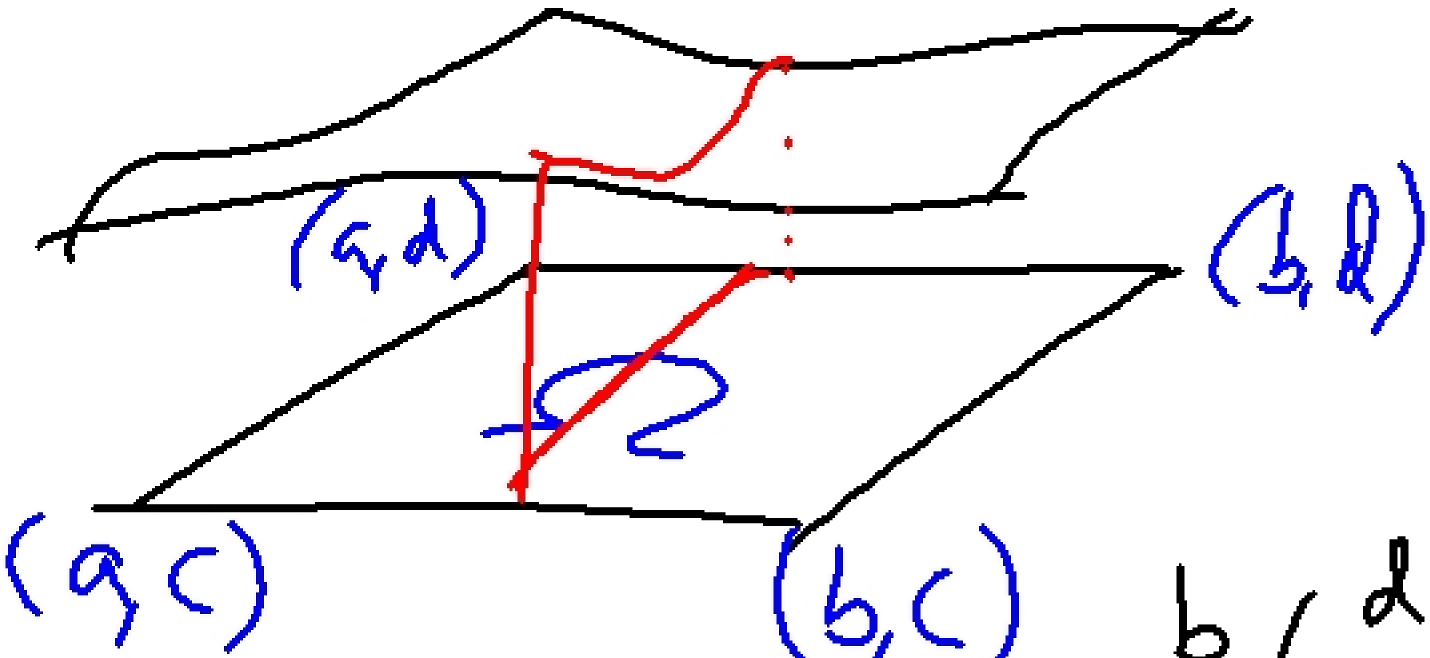
$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

Areaberäkning:

Arean av ett område Ω

ges av $\iint_{\Omega} dx\,dy$.

Beräkning av dubbelintegraler



Förutsättning: att integralerna existerar, tex då f kontinuerlig

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ex/än: Beräkna

$$\iint_\Omega xy\,dx\,dy \quad \text{då } \Omega \text{ är området}$$

$$\{(x,y);\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\}.$$

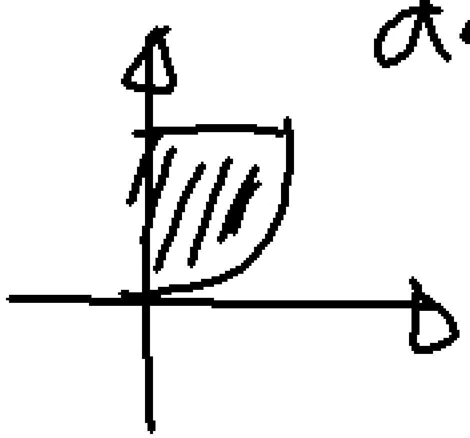
$$\iint_\Omega xy\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{-1}^{1} xy\,dy \right) dx = \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{1} dx$$

$$= \int_0^2 x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2} xy\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2y\,dy = 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

Ex/övn: Beräkna $\iint_{\Omega} x^2\,dx\,dy$



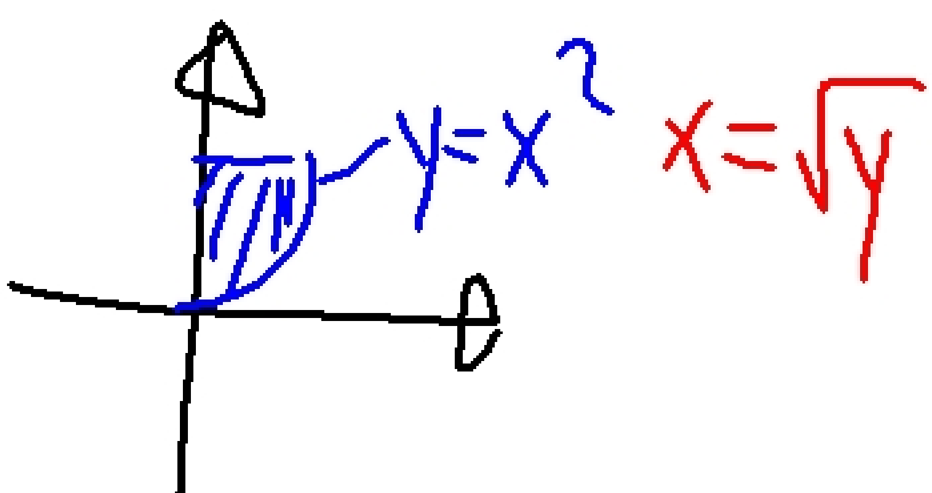
då $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$

$$\iint_{\Omega} x^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{1} x^2\,dy\right)dx$$

$$\iint_{\Omega} x^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y\right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 x^2 - x^4\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$



$$\iint_{\Omega} x^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} x^2\,dx\right)dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} \, dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} \, dy = \frac{1}{3} \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - 0 \right) = \frac{2}{15}.$$

Läs avsnitt 9.4 och begrunda.

Substitution i dubbelintegraler

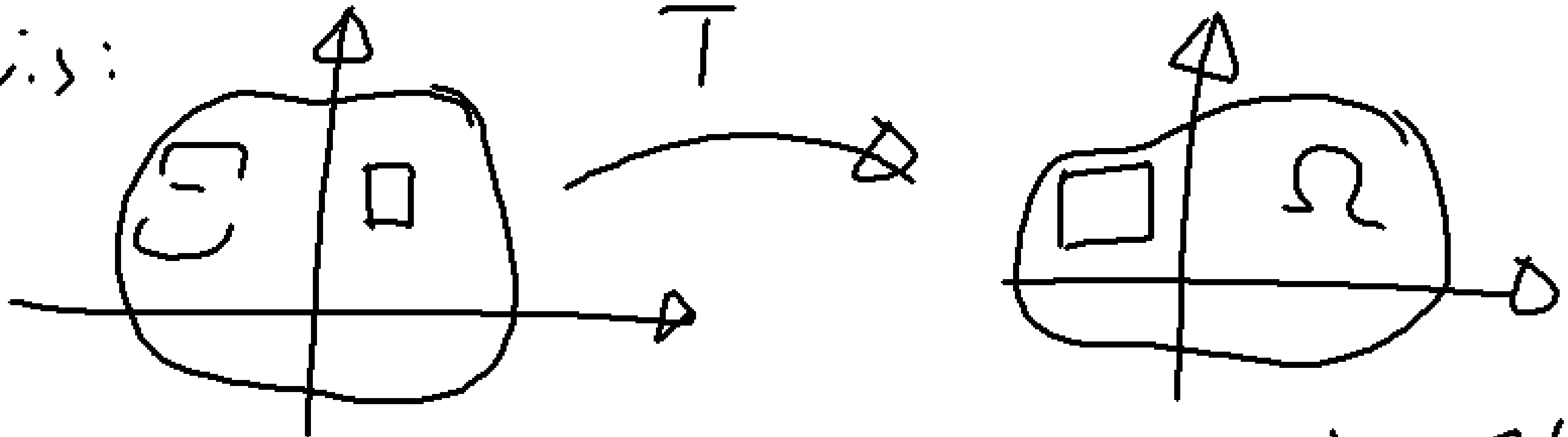
en variabel: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,dt$

i två variabler:

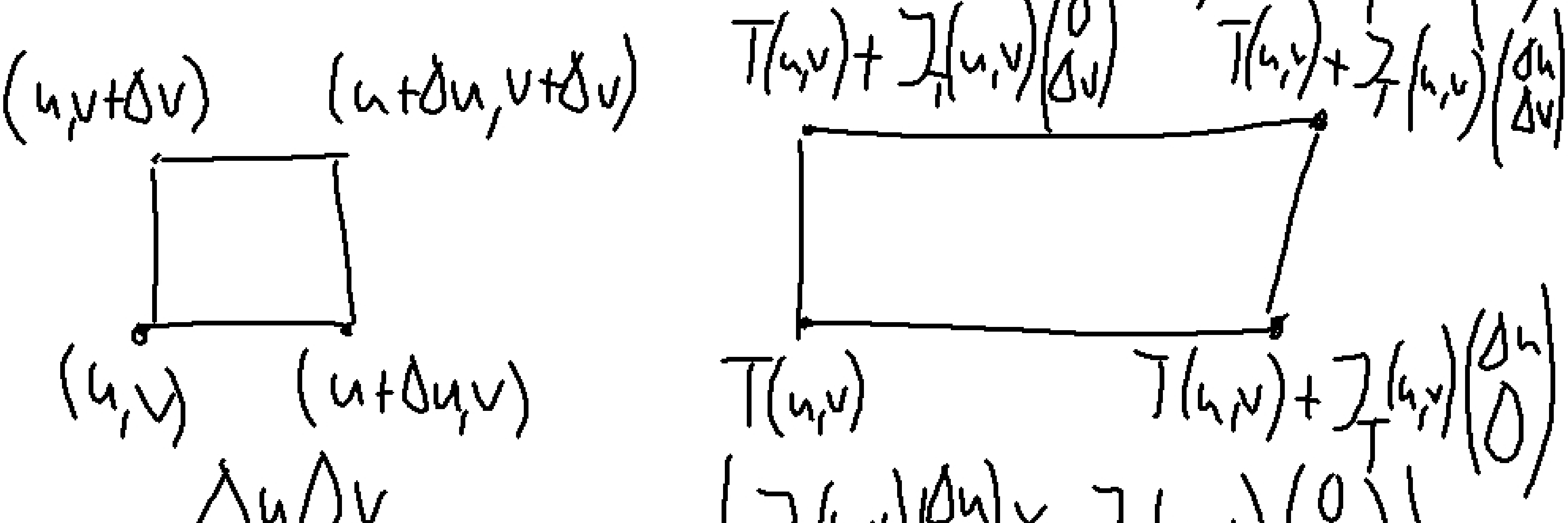
$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Xi} f(x(u,v),y(u,v))\,|\det J_T(u,v)|\,du\,dv$$

där $T(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ differentierbar och inverterbar funktion som tar $\Xi \to \Omega$ sådan att $\det J_T \neq 0$ n.ö. i Ξ.

Bevis:



D: $T(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx T(u,v) + J_T(u,v)\begin{pmatrix}\Delta u \\ \Delta v\end{pmatrix}$



$$\left| J_T(u,v)\begin{pmatrix}\Delta u \\ 0\end{pmatrix} \times J_T(u,v)\begin{pmatrix}0 \\ \Delta v\end{pmatrix} \right|$$

$$\left| J_T(u,v)\begin{pmatrix}\Delta u\\ 0\end{pmatrix} \times J_T(u,v)\begin{pmatrix}0\\ \Delta v\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\end{pmatrix}\Delta u \times \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\Delta v\right| = \underbrace{\left|\det J_T(u,v)\right|}_{\text{OBS! beloppet!}} \Delta u \, \Delta v$$