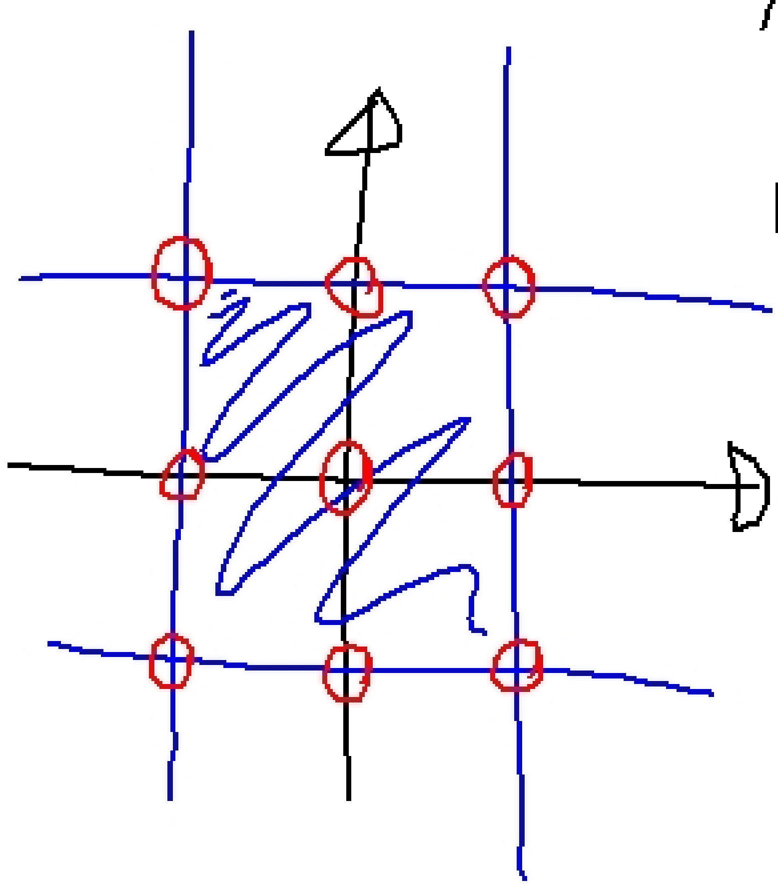
Ex/övn: I vilka punkter antar funktionen $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ sitt största resp minsta värde det slutna området begränsat av linjerna

$$x=-1, \quad x=1, \quad y=-1, \quad y=1.$$



$$(0,0) = \text{grad} f(x,y) = \left(2x e^{x^2+y^2}, 2y e^{x^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$g_1(x,y) = x+1 \qquad g_3(x,y) = y+1$$

$$g_2(x,y) = x-1 \qquad g_4(x,y) = y-1$$

$$\operatorname{grad} g_1(x,y) = \operatorname{grad} g_2(x,y) = (1,0) = \vec{v}$$

$$\operatorname{grad} g_3(x,y) = \operatorname{grad} g_4(x,y) = (0,1) = \vec{u}$$

I: $\operatorname{grad} f(x,y) \parallel \vec{v}$

$$\left(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}\right) \parallel (1,0)$$

$\Rightarrow y = 0$ ger punkterna $(1,0)$ och $(-1,0)$

II: $\operatorname{grad} f(x,y) \parallel \vec{u}$

$$\left(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}\right) \parallel (0,1)$$

$\Rightarrow x = 0$ ger punkterna $(0,1)$ och $(0,-1)$

	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,1)$
f:	1	e	e	e	e	e^2

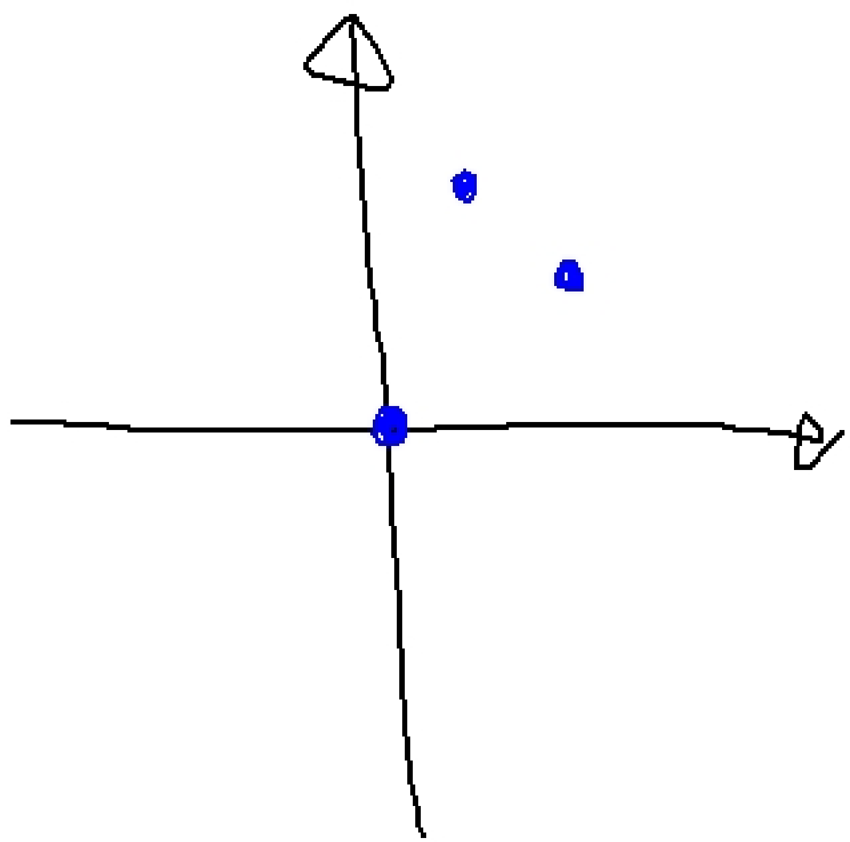
$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
e^2	e^2	e^2

Störstavärdet antas i punkterna $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ och $(-1,-1)$

Minsta värdet i $(0,0)$.

Minsta kvadrat metod

Ex: Bestäm den linje $y=kx+m$ som bäst anpassar till punkterna $(0,0)$, $(1,3)$ och $(2,2)$.



Om allt vore perfekt

$$\begin{cases} 0 = k\cdot 0 + m \\ 3 = k\cdot 1 + m \\ 2 = k\cdot 2 + m \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi skulle då ha

$$\left\| \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}\right\|^2 = 0$$

eftersom världen inte är alltid fungerar som vi vill får vi istället försöka minimera uttrycket

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}}_{\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}}_{\vec{x}}\right\|^2$$

Sats: Om $\vec{x}_0$ är en minpunkt till $F(\vec{x}) = |A\vec{x} - \vec{b}|^2$ så uppfyller $\vec{x}_0$ normalekvationen

$$A^T A \vec{x}_0 - A^T \vec{b} = \vec{0}.$$

"bevis": $|A\vec{x} - \vec{b}|^2 = (A\vec{x} - \vec{b})^T (A\vec{x} - \vec{b})$

$$= \vec{x}^T A^T A \vec{x} - \vec{x}^T A^T \vec{b} - \vec{b}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{b}$$

För en extrempunkt gäller

$$\operatorname{grad} F(\vec{x}) = \vec{0}$$

Vi får att

$$0 = \text{grad}\, F(\vec{x})_i = \vec{e}_i^{\,T} A^T A \vec{x} +$$
$$+ \vec{x}^T A^T A \vec{e}_i - \vec{e}_i^{\,T} A^T \vec{b} - \vec{b}^T A \vec{e}_i$$
$$= 2 \vec{e}_i^{\,T} \left(A^T A \vec{x} - A^T \vec{b} \right)$$

Eftersom detta gäller för alla i måste

$$A^T A \vec{x} - A^T \vec{b} = \vec{0}.$$

För att se att $\vec{x}_0$ är en minpunkt

$$|A\vec{x} - \vec{b}|^2 = |A\vec{x}_0 - \vec{b} + A(\vec{x} - \vec{x}_0)|^2 = |A(\vec{x} - \vec{x}_0)|^2 \geq 0$$

Kolla detta!

Sats: Normalekvationen har alltid minst en lösning.

bevis: Låt U vara den matris som tar $A^T A$ till sin trappstegsmatris dvs UA^TA är en trappstegsmatris.

$$UA^TA\vec{x} = UA^T\vec{b}$$

För att systemet ska sakna lösningar måste trappstegsmatrisen UA^TA innehålla en nollrad medan motsvarande position på den högra sidan inte är noll.

Det betyder att det skulle finnas en vektor $\vec{c}$ så att

$$\vec{c}^T A^T A = \vec{0} \quad \text{men} \quad \vec{c}^T A^T \vec{b} \neq \vec{0}.$$

$$\Downarrow$$

$$|A\vec{c}|^2 = \vec{c}^T A^T A \vec{c} = 0 \Rightarrow A\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c}^T A^T = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{c}^T A^T \vec{b} = \vec{0}$$ vilket motsäger att det saknas lösningar.

Sats: Funktion $F(\vec{x}) = |A\vec{x} - \vec{b}|^2$ har en unik minpunkt om och endast om kolonnvektorerna i A är linjärt oberoende

Minpunkten är $\vec{x}_0 = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$

bevis: Att $A^T A$ är inverterbar $\Longleftrightarrow$

$A^T A \vec{x} = \vec{0}$ bara om $\vec{x} = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow$

$A\vec{x} = \vec{0}$ bara om $\vec{x} = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow$

kolonnvektorerna i A är linjärt oberoende.

Ex/övn: Minsta kvadrat anpassa punkterna $(0,0)$, $(1,3)$ och $(2,2)$ till en linje, $y=kx+m$.

Lösn: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beräkna $(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$.

$A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^TA=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$(A^TA)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad (A^TA)^{-1}A^T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$(A^TA)^{-1}A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

SVAR: $y = x + \frac{2}{3}$

Ex/Öm: Bestäm den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som bäst anpassar till punkterna $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,5)$ och $(4,8)$.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{129}{20} & -\frac{27}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{27}{4} & \frac{31}{4} \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1}A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{21}{20} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

SVAR: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{21}{20}x - \frac{1}{4}$.