Bivillkor i form av likheter

Ex: Bestäm största och minsta värdet som funktionen

$$f(x,y) = xy$$

antar på enhetscirkeln $x^2+y^2=1$.

(Eftersom enhetscirkeln är kompakt så antar funktionen ett största och minsta värde)

Metod 1 (parametrisering):

Enhetscirkeln kan ses som kurvan $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.

$\phantom{kurvan \vec{r}(t) = (\cos} x \qquad y$

$f(r(0)) = 0 = f(r(2\pi))$

Vi får att

$$f(\vec{r}(t)) = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

så vi söker $\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = 0$, dvs

$$\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

$f(\vec{r}(t)) = \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

Största värdet $\frac{1}{2}$, minsta $-\frac{1}{2}$

Metod 2 (Lagranges metod):

Låt $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Så nivåkurvan $g(x,y)=0$ är enhetscirkeln. Om $\operatorname{grad} g(x_0,y_0) \neq (0,0)$ så definierar ekvationen $g(x,y)=0$ en reguljär kurva i en omgivning av punkten (x_0,y_0) säg $\vec{r}(t)$ med $\vec{r}(0)=(x_0,y_0)$ och $g(\vec{r}(t))=0$. Om (x_0,y_0) är en lokal extrempunkt för f med bivillkor $g(x,y)=0$ så är $t=0$ en lokal extrempunkt för

$h(t) = f(\vec{r}(t))$, vilket ger $h'(0) = 0$.

Enligt kedjeregeln är

$$0 = h'(0) = \operatorname{grad} f(\vec{r}(0)) \cdot \vec{r}\,'(0)$$

så $\operatorname{grad} f(\vec{r}(0))$ är normal till kurvan i punkten $\vec{r}(0)$. ($\vec{r}\,'(0)$ är ju tangentvektorn)

Vi har även att $\operatorname{grad} g(\vec{r}(0))$ är normal till kurvan i punkten $\vec{r}(0)$, så vi måste ha

$$\operatorname{grad} g(\vec{r}(0)) \parallel \operatorname{grad} f(\vec{r}(0)).$$

Låt oss tillämpa detta på vårt exempel.

I exemplet är $f(x,y) = xy$ och $g(x,y) = x^2+y^2-1$ så vi får att

$$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 2y)$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (y, x)$$

Enligt vårt resonemang gäller antingen

$$\operatorname{grad} g(x_0,y_0) = (0,0)$$ eller så är

$$\lambda \operatorname{grad} g(x_0,y_0) = \operatorname{grad} f(x_0,y_0)$$

om (x_0,y_0) är en lokal extrempunkt under bivillkoret $g(x,y)=0$.

Fall 1: $\text{grad}\, g(x,y) = (0,0)$ ger $(x,y) = (0,0)$ som inte uppfyller $g(x,y) = 0$.

Fall 2: $\text{grad}\, g(x,y) \parallel \text{grad}\, f(x,y)$

$$\begin{cases} y_0 = \lambda 2 x_0 \\ x_0 = \lambda 2 y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} y_0 = \lambda 2 x_0 \\ x_0 = \lambda 2 y_0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{vmatrix} = 2y_0^2 - 2x_0^2$$

så

$$\begin{cases} x_0^2 = y_0^2 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = y_0^2 \\ 2x_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dvs tänkbara punkter är

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{max}: \frac{1}{2} \\ \text{min}: -\frac{1}{2} \end{matrix}}$$

Ex/övn: Antag att en aluminiumburk, där bottenplattan har radie r och höjden är h, ska tillverkas. Vi vill att volymen ska bli så stor som möjligt då arean är A. Bestäm burkens proportioner då volymen är maximal.

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad \longleftrightarrow \quad g$$

$$V = \pi r^2 h \quad \longleftrightarrow \quad f$$

Vi har att

$$\operatorname{grad} g(r,h) = (4\pi r + 2\pi h,\ 2\pi r)$$

så $\operatorname{grad} g(r,h) = (0,0)$ bara om $(r,h) = (0,0)$ men det stämmer inte med ekvationen $0 \neq A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Vi undersöker sedan när $\operatorname{grad} g(r,h) \parallel \operatorname{grad} f(r,h)$.

$$\operatorname{grad} f(r,h) = (2\pi rh,\ \pi r^2)$$

$$\begin{cases} 4\pi r + 2\pi h = \lambda 2\pi rh \\ 2\pi r = \lambda \pi r^2 \\ A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r + h = \lambda rh \\ 2r = \lambda r^2 \overset{(r\neq 0)}{\Leftrightarrow} 2 = \lambda r \\ A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r + h = \lambda r h \\ r = \frac{2}{\lambda} \\ A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{cases} \qquad 2\frac{2}{\lambda} + h = \lambda \frac{2}{\lambda} h$$

$$4 + \lambda h = 2\lambda h \iff \lambda h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{\lambda}$$

Insatt i ekvation 3 ger det

$$A = 2\pi \frac{2}{\lambda}\frac{4}{\lambda} + 2\pi \frac{4}{\lambda^2} = \frac{24\pi}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{24\pi}{A}} \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{6\pi}}{\sqrt{A}}, \; h = \frac{8\sqrt{6\pi}}{\sqrt{A}}.$$

dvs $h = 2r$.

Ex: Finn minsta värdet för $f(x,y) = y$ då $y^3 = x^2$.

Lösn: Låt $g(x,y) = y^3 - x^2$. Då har vi

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,1) \quad \text{och}$$

$$\operatorname{grad} g(x,y) = (-2x, 3y^2)$$

så $\operatorname{grad} f(x,y) \parallel \operatorname{grad} g(x,y)$

då $x = 0$, $y \neq 0$. Men uppenbarligen har f min när $y = 0$ och $x = 0$ dvs

då $\operatorname{grad} g(x,y) = (0,0)$.

Ex/övn: Finn största och minsta värdet som funktionen $f(x,y)=xe^{x+y}$ antar i området $3x^2+2xy+y^2\leq 2$.

Lösn: Vi börjar med att bestämma alla stationära punkter för f.

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(e^{x+y}+xe^{x+y},\ xe^{x+y})$$

$$\neq (0,0)$$

så det finns inga stationära punkter.

Låt $g(x,y)=3x^2+2xy+y^2-2$.

Vi har att

$$\operatorname{grad} g(x,y) = (6x+2y,\ 2x+2y)$$

$\big(= (0,0)$ bara om $(x,y)=(0,0)$ men $(0,0)$ uppfyller ej $g(x,y)=0\big)$

Att $\operatorname{grad} f(x,y) \parallel \operatorname{grad} g(x,y)$ ser

$$0 = \begin{vmatrix} 6x+2y & 2x+2y \\ (x+1)e^{x+y} & x e^{x+y} \end{vmatrix} = e^{x+y} \begin{vmatrix} 6x+2y & 2x+2y \\ x+1 & x \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad 0 = 4\cancel{6}x^2 + \cancel{2xy} \cancel{-2x^2} - 2x - \cancel{2xy} - 2y$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x^2 = x+y \quad\Rightarrow\quad 4x^4 = x^2+2xy+y^2$$

Ekvationen $g(x,y)=0$ ger

$$4x^4 = x^2+2xy+y^2 = 2-2x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^4+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y=\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{3}{2}$$

Så de intressanta punkterna är

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$$

max $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2}}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}}$ min $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}$