Extremproblem

En variabel: Låt $f(t) = \sin t \quad t \in (0, 2\pi)$

och sök största och minsta

värdet.

Stationära punkter: $f'(t) = 0$

$0 = f'(t) = \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$.

Insatt i $f(t)$ ger det $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

och $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Vidare är $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$
2π

Sats (nödvändigt villkor för lokala extrempunkter)

Om $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad på en öppen mängd och (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt så är

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0)$$

eller så är f inte deriverbar i punkten.

Anm: Det här säger att tangentplanet i punkten är parallellt med xy-planet.

Bevis: Om (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt till $f(x,y)$ så blir x_0 även en lokal extrempunkt till $g(x) = f(x, y_0)$. Så envariabel teori säger att $g'(x_0) = 0$ eller så existerar inte derivatan men $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Pss får vi att

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \text{ om den existerar.}$$

Sammanfattningsvis har vi kommit fram till att $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0)$ om de partiella derivatorna existerar.

Ex/Övn: Bestäm alla lokala extrempunkter till x^2+y^2 resp $\sqrt{x^2+y^2}$.

Lösn: Låt $f(x,y) = x^2+y^2$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y)$$

så $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Alltså $(x,y) = (0,0)$ är en stationär punkt. Eftersom $f(0,0) = 0$ och $f(x,y) \geq 0$ är origo en lokal extrempunkt.

Låt $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

så $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Eftersom $\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0,0)$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$ och $\operatorname{grad} f$ ej existerar i origo är detta den enda möjliga lokala extrempunkten.

Eftersom $f(x,y) \geq 0$ och $f(0,0)=0$ är origo en lokal extrempunkt.

Ex/Övn: Bestäm eventuella lokala extrempunkter till $f(x,y) = xy$.

Lösn: Stationära punkter

$\text{grad} f(x,y) = (0,0)$ ger

$(y, x) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Men om $y = x$ har vi

$f(x,x) = x^2$ $\quad x=0$ lok min

och om $y = -x$

$f(x,-x) = -x^2$ $\quad x=0$ lok max

alltså saknas extrempunkter.

1. Vi kan undersöka om origo är en lokal extrempunkt genom att betrakta riktningsderivator

$$f'_{\vec{n}}(x,y) = \text{grad}\, f(x,y) \cdot \underbrace{\left(\frac{-(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}_{= \vec{n}}$$

För min ska $f'_{\vec{n}} \leq 0$ och för max $f'_{\vec{n}} \geq 0$

Tex: $f(x,y) = xy \Rightarrow f'_{\vec{n}}(x,y) = -\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olika tecken

2. Taylorutveckling för

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \operatorname{grad} \overset{=(0,0)}{f(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0, y-y_0)$$

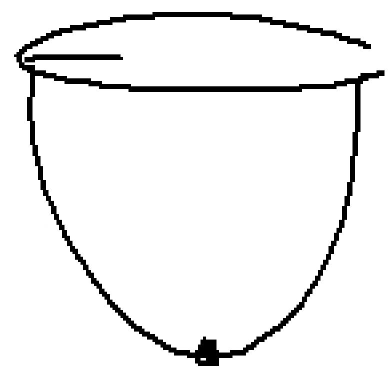
$$+ \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + O\left(\|(x-x_0, y-y_0)\|^3\right)$$

Tex när $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(x,y) = xy$

$$f(x,y) = 0 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\|(x,y)\|^3)$$

Kvadratisk form = homogent polynom av grad två.

$$p(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (x,y)\overbrace{\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}}^{M}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$



min punkt

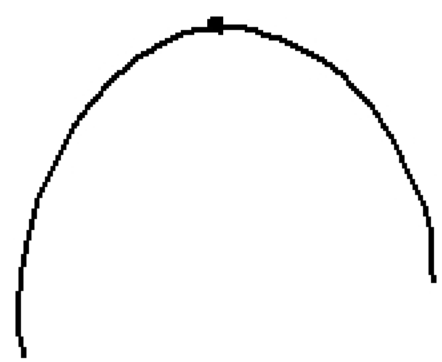
$\det M > 0$

$A > 0$

pos def

$p(x,y) \geq 0$ och $=0$ bara för $(x,y)=(0,0)$

$a\xi^2 + b\eta^2$ där $a,b>0$



max punkt

$\det M > 0$

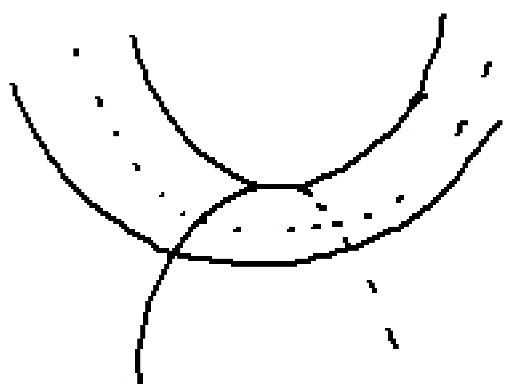
$A < 0$

$p(x,y) \leq 0$ och $=0$ bara för $(x,y)=(0,0)$

$a\xi^2 + b\eta^2$ där $a,b<0$

neg definit

Om $p(x,y) > 0$ ibland och < 0 ibland kallas den indefinit och vi får en sadelpunkt



$\det M \leq 0$

$a\xi^2 - b\eta^2$ där a och b har samma tecken

Om $p(x,y) \geq 0$ $(\leq)$ men $= 0$ inte bara för $(x,y) = (0,0)$ positivt semidefinit (resp negativt semidefinit)

$(\det M = 0)$

Ex: $f(x,y) = x^2 + y^3$

kvadratisk form

pos semidefinit

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 3y^2)$ så origo är en stationär punkt men ingen extrempunkt som vi ser genom att ta $x=0$.

Ex/Övn: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x,y) = x^2 + xy^2 - y$.

Lösn: $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x + y^2,\ 2xy - 1)$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},-1\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2},-1\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2},-1\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2},-1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}\Bigg|_{\left(-\frac{1}{2},-1\right)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = -2 - 4 = -6 < 0$$

$\Rightarrow$ sadelpunkt dvs ingen extrempunkt.