Taylors formel

En variabel:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + f''(a)\frac{(t-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\tau)\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\tau \in (a,t)$$

Låt f vara av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en funktion med kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n+1$.

Sätt $\varphi(t) = f(\vec{x} + t\vec{h})$.

$$\overset{f(\vec{x}+t\vec{h})}{\varphi(t)} = \overset{f(\vec{x})}{\varphi(0)} + \varphi'(0)\,t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$+ \varphi^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + \varphi^{(n+1)}(\tau)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\tau \in (0,t)$.

$$\varphi(t) = f \circ g(t) \quad \text{där } g(t) = \vec{x} + t\vec{h}$$

Vi har enligt kedjeregeln att

$$\varphi'(t) = J_f(g(t))\, g'(t) = \operatorname{grad} f(g(t))\, g'(t)$$

$$= \operatorname{grad} f(g(t))\, \vec{h}$$

så

$$\varphi'(0) = \operatorname{grad} f(\vec{x})\, \vec{h} = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$= \vec{h} \cdot \nabla f \Rightarrow \frac{d}{dt} = \vec{h} \cdot \nabla$$

vilket betyder att

$$\frac{d^n}{dt^n} = \left(\vec{h} \cdot \nabla\right)^n$$

Sätter vi nu $t = 1$ har vi:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \left(\vec{h} \cdot \nabla\right) f(\vec{x}) + \ldots + \left(\vec{h} \cdot \nabla\right)^n \frac{f(\vec{x})}{n!}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\vec{h} \cdot \nabla\right)^{n+1} f(\vec{x} + \tau \vec{h})$$

där $\tau \in (0,1)$

Speciellt när $n=2$:

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) +$$

Taylor polynomet $P_n(h,k)$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\tau h, y+\tau k)$$

$$= f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) +$$

$$+ hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + \dots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^i k^{n-i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x,y)$$

$$+ R_{n+1}(h,k) \leftarrow$$ Lagranges restterm

Ex/övn: Bestäm Maclaurin polynomet av grad 2 till $f(x,y) = e^{x+y}$.

$$p_2(x,y) = 1 + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

$$= 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$$

Ex/övn: Taylorutveckla e^{x+y} kring punkten $(1,0)$ till andra ordningen.

$h = x - 1$
$k = y$

$$e^{x+y} = e + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) +$$

$$+ \frac{(x-1)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) + (x-1)y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) +$$

$$+ \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) + R_3(x-1,y) =$$

$$= e + (x-1)e + ye + \frac{(x-1)^2}{2}e +$$

$$+ (x-1)ye + \frac{y^2}{2}e + R_3(x-1,y).$$

$$\frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(x-1)^i y^{3-i} e^{\tau}$$

grad hos $x^5 + 4x^3y + 6y^5x^2 = 7$

graden hos polynomet är högsta summan av x och y graden hos en term.

Ett polynom där alla termer har samma grad kallas homogent.

Ex:

$\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$ homogent

$x^5 + 4x^3y + 6y^5x^2$ ej homogent.

Sats: Ett homogent polynom $p(\vec{x})$
av grad $n > -\infty$ (dvs ej nollpolynomet)
är av $O(r^n)$, $r = |\vec{x}|$
$\neq O(r^\alpha)$ om $\alpha > n$.

Läxa: läs och första beviset i boken

Sats: Om f har kontinuerliga partiella derivator minst av ordning $n+1$ i en omgivning av punkten (x,y) och

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = P_n(\vec{x},\vec{h}) + O(r^{n+1}) \quad r = |\vec{h}|$$

så är $p_n(\vec{x}, \vec{h})$ Taylorpolynomet i $\vec{x}$ av grad n.

Ex/Övn: MacLaurin utveckla e^{x+y} till ordning 2 med Ordoresttern.

Taylor utveckla även e^{x+y} kring $(1,0)$ till ordning 2 med ordoresttern.

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(r^3)\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + O(r^3)\right)$$

$$= 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy + O(r^3)$$

$$e^{x+y} = e e^{(x-1)+y} = e\left(1 + (x-1) + y + \frac{(x-1)^2}{2} + \right.$$

$$\left. + (x-1)y + \frac{y^2}{2} + O(r^3)\right) =$$

$$= e + e(x-1) + ey + \frac{(x-1)^2}{2}e + (x-1)ye +$$

$$+ \frac{y^2}{2}e + O(r^3).$$

Differentialer: $df(\vec{x}, \vec{h}) = (\vec{h} \cdot \nabla) f$

eller $df(\vec{x}, d\vec{x}) = (d\vec{x} \cdot \nabla) f$

$n=2$ $\quad df(x, y, dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Taylors formel med Differentialer:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + df(\vec{x}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\vec{x}) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(\vec{x})$$
$$+ O(|\vec{h}|^{n+1})$$

$(\vec{h}\cdot\nabla)^2 f$

Ex/Övn: Den inre energin E hos en gas kan ses som en funktion av temperaturen T och volymen V. Vi har också att

$$T\,dS = dE + p\,dV.$$

Använd ideala gaslagen $pV = CT$ för att visa att E bara beror av temperaturen, dvs $\frac{\partial E}{\partial V} = 0$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial T} dT + \frac{\partial E}{\partial V} dV$$

så

$$T\,dS = \frac{\partial E}{\partial T} dT + \frac{\partial E}{\partial V} dV + p\,dV =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{CT}{V} \right) dV$$

$$dS = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T} dT + \left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{C}{V} \right) dV$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V}$$

$$= 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial V} = 0$$