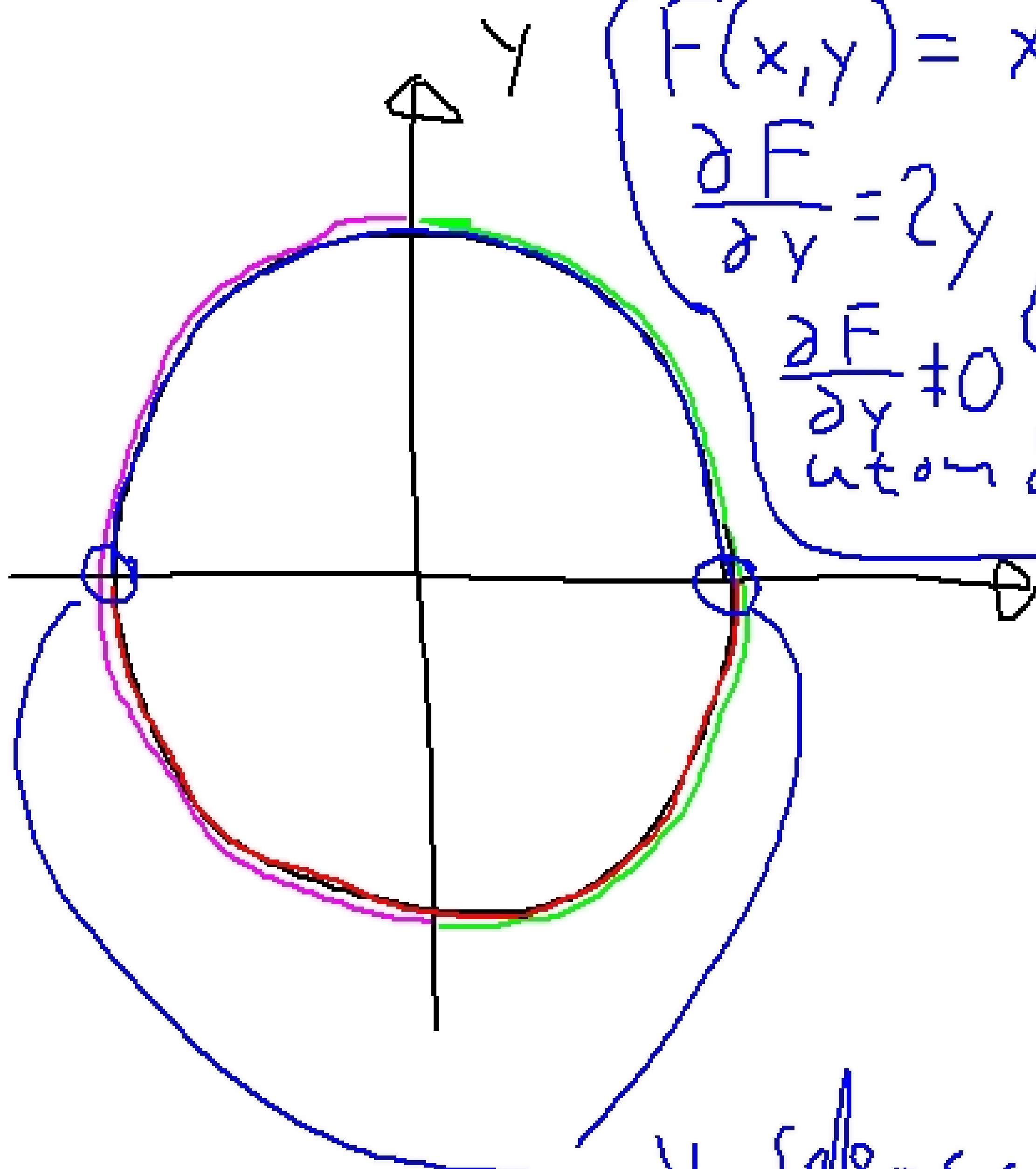
Implicita funktioner

Ex: $x^2+y^2=1$

$$y_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



$F(x,y)=x^2+y^2-1$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ utom då $x=\pm 1$

$y_1=\sqrt{1-x^2}$

$y_2=-\sqrt{1-x^2}$

$x_1=\sqrt{1-y^2}$

$x_2=-\sqrt{1-y^2}$

y_1 saknar derivata när $x=\pm 1$

Ex:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 5x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

inversabilă

$\det \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -5 \\ \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2 - z \\ y = 3 - z \end{cases}$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 5x - 2y \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ex: $1x + y + z = 2$

$\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 2 - y - z$

Sats: Om $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$ är en funktion

de som $\vec{y}$ blir funktion av

de vi vill lösa ut

av typ $\mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator och $\vec{F}(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ men $\det \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$ (Obs $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$ är Jacobimatrisen map $\vec{y}$ variablerna) så finns i en omgivning av $\vec{x} = \vec{a}$ precis en funktion $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ ~~s~~med kontinuerliga partiella derivator map $\vec{x}$ sådan att

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$$

och $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{b}$.

Ex: $x^2+y^2=1$

$$F(x,y) = x^2+y^2-1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$ så satsen säger att så länge $y \neq 0$ kan vi lösa ut y som funktion av x.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$ så x kan lösas ut som funktion av y så länge $x \neq 0$.

Ex: $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 5x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$$\vec{F}(\overset{\vec{x}}{z}, \overbrace{x, y}^{\vec{y}}) = (x + y + 2z - 5,\ 5x - 2y + 3z - 4)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{så} \quad \det \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \neq 0$$

vilket visar att x och y går att lösa ut som funktioner av z.

Ex: $x + y + z = 2$

$$F(\overbrace{y, z}^{\vec{x}}, \overbrace{x}^{\vec{y}}) = x + y + z - 2$$

$\dfrac{\partial F}{\partial \vec{y}} = \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1$ så satsen säger att x går att lösa ut som funktion av y och z.

Ex/Övn: Visa att vi kan lösa ut z som funktion av x och y från ekvationen $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ nära punkten $(0,0,1)$.

$$F(\overbrace{x,y}^{\vec{x}},\overset{\vec{y}}{z}) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$$

$$\det \frac{\partial F}{\partial \vec{y}} = \det \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

så

$$\det \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0.$$

Därmed går z att lösa ut som funktion av x och y i en omgivning av punkten.

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{y}} = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$ som är noll i punkten.

Ex: $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 5x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Eftersom z blir parameter t sätt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) -1 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-t \\ 0 & 1 & 0 & 3-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Ex: $T: \begin{cases} u = x^2+y^2-1 \\ v = x \end{cases}$

$$J_T = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ så } \det J_T = -2y$$

bevis av implicita funktionssatsen:

Bilda funktionen $\vec{G}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{F}(\vec{x},\vec{y}))$.

$\vec{G}$ är en funktion av typ $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$

så säger satsen om inversa funktioner att $\vec{G}$ har en differentierbar invers i en omgivning av punkten $(\vec{a},\vec{b})$ om och endast om

$$\det J_{\vec{G}}(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0 .$$

Vi har att

$$J_{\vec{G}}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} E_m & O_{m \times n} \\ \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{a}, \vec{b}) & \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{a}, \vec{b}) \end{pmatrix}$$

Jacobi med $\vec{y}$ fixa

Jacobi med $\vec{x}$ fixa.

så

$$\det J_{\vec{G}}(\vec{a}, \vec{b}) = \det \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$$

enligt antagandet i satsen, vilket visar att $\vec{G}$ är inverterbar nära $(\vec{a}, \vec{b})$.

Men då $(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{G}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}))$

får inversen också samma form

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{G}^{-1}(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{H}(\vec{u}, \vec{v})).$$

Eftersom $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ har vi $\vec{v} = \vec{0}$

vilket ger $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{u}, \vec{H}(\vec{u}, \vec{0}))$

dvs $\vec{y} = \vec{H}(\vec{u}, \vec{0}) = \vec{H}(\vec{x}, \vec{0}) = \vec{f}(\vec{x})$

för någon funktion $\vec{f}$. Speciellt

får vi att $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{b}$.

Från $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$ så

kedjeregeln ger om $T(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$

att

$$0 = J_{\vec{F} \circ T} = J_{\vec{F}} J_T = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} \right) \begin{pmatrix} E \\ J_{\vec{f}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} \cdot J_{\vec{f}}$$ så

$$J_{\vec{f}} = -\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}$$

Ex: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$J_f(x) = f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) =$$

$$= -(2y)^{-1}(2x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ger $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

Ex: $F(\overbrace{x,y}^{\vec{x}}, \overset{\vec{y}}{z}) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (-2x, -2y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{y}} = \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

så tex

$$\operatorname{grad} z(0,0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{y}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}\right) = -\frac{1}{2z}(-2x, -2y) =$$

$$= \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = (0,0)$$

Vi kan också derivera ekvationen

$$z^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0$$

direkt om vi håller i åtanke att z nu beror av x och y.

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad 2zz'_x - 2x = 0 \iff z'_x = \frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \quad 2zz'_y - 2y = 0 \iff z'_y = \frac{y}{z}$$

Ex/Övn: Visa att det går att lösa ut x som en funktion av y och z i en omgivning av punkten $(\sqrt{2}, 0, 1)$ ur ekvationen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Bestäm även de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$ och $\frac{\partial x}{\partial z}(0,1)$.

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\sqrt{2},0,1) = 2\sqrt{2} \neq 0$

$2x x'_y + 2y = 0, \; 2x x'_z - 2z = 0 \iff x'_y(0,1) = 0, \; x'_z(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$