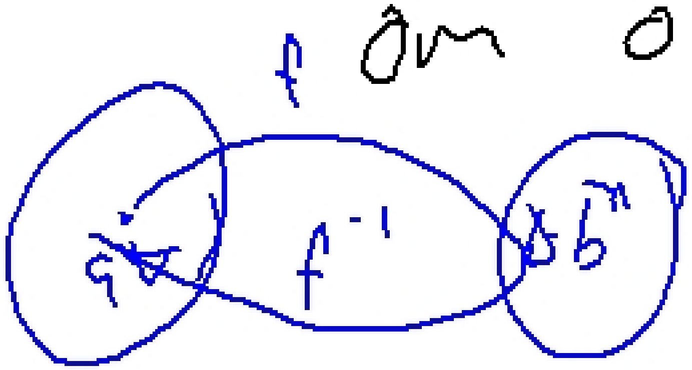
Sats: Låt f vara en funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\vec{a}$.

Då finns en differentierbar invers def f i en omgivning av $\vec{f}(\vec{a})$ om och endast om



$$\det J_{\vec{f}}(\vec{a}) \neq 0.$$

Inversens Jacobimatris ges av $J_{\vec{f}^{-1}}(\vec{y}) = \left(J_{\vec{f}}(\vec{x})\right)^{-1}$ där $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Exempel: Låt $\vec{f}(x,y) = (e^x, e^{x+y})$.

Punkten $f(0,0) = (1,1)$ och vi vill visa att det finns en invers definierad i en omgivning av $(1,1)$.

$$\det J_{\vec{f}}(0,0) = \left. \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{vmatrix} \right|_{(x,y)=(0,0)} = e^{2x+y} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$$

Så satsen säger att en differentierbar invers finns.

"bevis": Eftersom $\vec{f}$ är differentierbar nära $\vec{a}$ har vi

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$$

så om $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ har vi

$$\vec{y} - \vec{b} \approx J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$$

Om nu $\det J_{\vec{f}}(\vec{a}) \neq 0$ så är matrisen $J_{\vec{f}}(\vec{a})$ inverterbar, vilket ger

$$\vec{x}-\vec{a} \approx \left(J_{\vec{f}}(\vec{a})\right)^{-1}(\vec{y}-\vec{b})$$

Så

$$\vec{x} = \vec{a} + \left(J_{\vec{f}}(\vec{a})\right)^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$$

$$\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y}) \approx \vec{f}^{-1}(\vec{b}) + \left(J_{\vec{f}}(\vec{a})\right)^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$$

vilket visar att $\vec{f}^{-1}$ är differentierbar.

Vi ser också att $J_{\vec{f}^{-1}}(\vec{b}) = \left(J_{\vec{f}}(\vec{f}^{-1}(\vec{b}))\right)^{-1}$.

Ex/övn: Låt $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$.

Avgör kring vilka punkter (x,y) funktionen har en differentierbar invers.

$$\det J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x$$

så f har differentierbar invers kring punkter där $x \neq 0$.

Ex/övn: Låt $T = \begin{cases} u = x \\ v = y^2 \\ w = z^3 \end{cases}$.

Var är T lokalt inverterbar?

Så $T(x,y,z) = (x, y^2, z^3)$

$$\det J_T(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{vmatrix} = 6yz^2$$

så lokalt inverterbar då y och $z \neq 0$.