Ex: Låt $T(r,\varphi) = (\underset{x(r,\varphi)}{r\cos\varphi}, \underset{y(r,\varphi)}{r\sin\varphi})$.

Givet en funktion f sätter vi $\tilde{f}(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = f(r,\varphi)$.

$f = \tilde{f} \circ T$

Kedjeregeln säger nu att

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \operatorname{grad} f = J_f = J_{\tilde{f}\circ T} = J_{\tilde{f}} J_T =$$

$$= \operatorname{grad}\tilde{f}\, J_T = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

Vi får så tex

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(r\cos\varphi) =$$

$$= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(-y) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\, x$$

eller med differentialoperatorer

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Ex: Transformera $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

med transformationen

$$T(x,y) = \left(u(x,y), v(x,y)\right) = (x+y, x-y)$$

Vi sätter $\tilde{f}(u,v) = f(x,y)$ så

$f = \tilde{f} \circ T$ vilket enl kedjeregeln

ger

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} \tilde{f} \, J_T$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

Alltså $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ger $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0$.

Kurvor och ytor

Vi påminner oss att

Def: Om $\vec{r}$ är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$ definierad på ett intervall sägs $\vec{r}(t)$ (eller $V_{\vec{r}}$) vara en (parameter)kurva i $\mathbb{R}^n$.

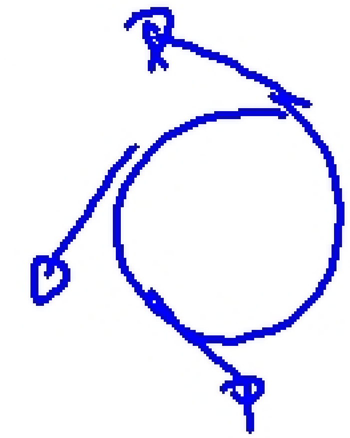
Def (reguljär kurva): En kurva $\vec{r}(t)$ kallas reguljär om det i varje punkt $\vec{r}(t)$ gäller att $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$.

Om detta gäller utom i ett ändligt antal punkter sägs kurvan styckvis reguljär (tex $(t, |t|)$)

De punkter där $\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$ eller derivatan ej existerar kallas singulär (map parameterframställningen)

med avseende på

Ex/övn: Visa att enhetscirkeln är en reguljär kurva.



$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow$ enhetscirkeln är reguljär.

Ex: $\vec{r}(t) = (\cos(t^3), \sin(t^3))$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin(t^3)3t^2, \cos(t^3)3t^2) = (0,0)$$

om $t=0$

falsk singularitet

Så $t=0$ är en singularitet m.a.p

$(1,0)$ den här parameterframställningen

Def: Värdemängden till en kontinuerligt deriverbar funktion $\vec{r}(t)$ definierad på ett intervall och med högst ett ändligt antal nollpunkter för derivatan kallas reguljär om

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$$ existerar.

En singularitet, t_0, där $\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$ existerar kallas falsk annars äkta.

Ex: $\vec{r}(t) = (\cos(t^3), \sin(t^3))$ ger

$\vec{r}\,'(t) = (-3t^2\sin(t^3), 3t^2\cos(t^3))$ så

$\vec{r}\,'(0) = \vec{0}$ men

$$\lim_{t\to 0} \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \lim_{t\to 0} \frac{(-3t^2\sin(t^3), 3t^2\cos(t^3))}{\sqrt{9t^4}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} (-\sin(t^3), \cos(t^3)) = (0,1)$$

Sats: Grafen till en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är reguljär om f har kontinuerlig derivata i alla punkter. $\vec{r}: x \mapsto (x, f(x))$

$\vec{r}\,'(x) = (1, f'(x))$

Sats: Om $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator och punkten (a,b) är sådan att $F(a,b) = C$ och $\operatorname{grad} F(a,b) \neq \vec{0}$ så utgör mängden $\{(x,y) ; F(x,y) = C\}$ en reguljär kurva lokalt kring (a,b).

Ex: Enhetscirkeln i $x^2 + y^2 = 1$ $\quad F(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$\operatorname{grad} F = (-2x, -2y) \neq 0$ för (x,y) sådana att $F(x,y) = 0$.

Sats: Om $\text{grad}\, F(a,b) \neq (0,0)$ så är den normal till nivåkurvan $F(x,y) = C$ i punkten (a,b) om $F(a,b) = C$.

Bevis: Eftersom nivåkurvan är regulär i (a,b) finns en parameterframställning $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(0) = (a,b)$.

Vi får $\frac{d}{dt} F(\vec{r}(t)) = \text{grad}\, F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$

så $\text{grad}\, F(a,b) \cdot \vec{r}\,'(0) = 0$ för $F(\vec{r}(t)) = C$.

tangentvektor.

Def: Värdemängden till en kontinuerlig funktion $\vec{r}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definierad på en rektangel kallas en (parameter)yta eller ytstycke.

Def: Ett reguljärt ytstycke i $\mathbb{R}^3$ är värdemängden till en funktion $\vec{r}$ definierad i en öppen rektangel D, som har kontinuerliga partiella derivator $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ så att

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$$

för alla $(u,v) \in D$.

En delmängd i $\mathbb{R}^3$ som i varje punkt har en omgivning där mängden sammanfaller med ett regulärt ytstycke kallas reguljär.

Ex: Enhetssfären $\vec{r}(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -\cos u \sin v & \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$$

$\neq \vec{0}$ om $\cos u \neq 0$.

Öv: Visa att även dessa punkter är reguljära.

Sats: Grafen till en funktion $z = f(x,y)$ är reguljär om f har kontinuerliga partiella derivator. $(x,y) \to (x, y, f(x,y))$

Sats: Om F har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten (a,b,c) och $F(a,b,c) = C$, $\operatorname{grad} F(a,b,c) \neq (0,0,0)$ så är mängden $\{(x,y,z) ; F(x,y,z) = C\}$ reguljär kring (a,b,c).

Sats: Om $\operatorname{grad} F(a,b,c) \neq (0,0,0)$ och $F(a,b,c) = C$ så är $\operatorname{grad} F(a,b,c)$ normalvektor till nivåytan $F(x,y,z) = C$ i punkten (a,b,c).

Ex: $z = f(x,y)$ tre sätt att få tangentplan

- $z = f(a,b) + \operatorname{grad} f(a,b)(x-a, y-b)$

$F(x,y,z) = z - f(x,y)$

- $\operatorname{grad} F(a,b,f(a,b)) \cdot (x-a, y-b, z - f(a,b)) = 0$

$F(x,y,z) = 0$

parameterframställning

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

vilket är samma som grad F.