# Kedjeregeln

I en variabel har vi att

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

motsvarande gäller i flera variabler

Sats: Låt $\vec{g}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ och $\vec{f}: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ vara differentierbara funktioner

då gäller

$$J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x}))\, J_{\vec{g}}(\vec{x})$$

Ex: $\vec{g}(t) = (\cos t, \sin t)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

då är $f \circ \vec{g}(t) = 1$. Så

vi får $J_{f\circ\vec{g}}(t) = (f\circ g)'(t) = 0$.

Kedjeregeln ger

$$J_{f\circ\vec{g}}(t) = J_f(\vec{g}(t))\, J_{\vec{g}}(t)$$

$$(f\circ g)'(t) = \operatorname{grad} f(\vec{g}(t)) \cdot (\vec{g})'(t)$$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y)$, $(\vec{g})'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Så $\quad \operatorname{grad} f(\vec{g}(t)) = (2\cos t, 2\sin t)$

och

$$\operatorname{grad} f(\vec{g}(t)) \cdot (\vec{g})'(t) =$$

$$= (2\cos t, 2\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) =$$

$$= -2\cos t \sin t + 2\sin t \cos t = 0$$

Från exemplet ser vi att om $\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så

blir $\quad \dfrac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \operatorname{grad} f(\vec{g}(t)) \cdot (\vec{g})'(t)$

Ex/övn: Bestäm $J_{\vec{g}\circ f}(x,y)$ då $\vec{g}$ och $f$ är som i exemplet.

$\left( \vec{g}(t) = (\cos t, \sin t) \ , \ f(x,y) = x^2+y^2 \right)$

$$J_{\vec{g}\circ f}(x,y) = J_{\vec{g}}(f(x,y)) \, J_f(x,y)$$

$$\vec{g}\circ f(x,y) = \left(\cos(x^2+y^2) \ \ \sin(x^2+y^2)\right) \qquad (\vec{g})'(f(x,y)) \ \operatorname{grad} f(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} -2x\sin(x^2+y^2) & -2y\sin(x^2+y^2) \\ 2x\cos(x^2+y^2) & 2y\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x^2+y^2) \\ \cos(x^2+y^2) \end{pmatrix} (2x, 2y)$$

Ex/övn: Låt $\vec{g}(t) = (t^2, 1+t)$ och $f(x,y) = xy$. Bestäm $J_{f\circ\vec{g}}(t)$ och $J_{\vec{g}\circ f}(x,y)$.

$$J_{\vec{g}\circ f}(x,y) = J_{\vec{g}}(f(x,y))\, J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \end{pmatrix} (y, x) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$J_{f\circ\vec{g}}(t) = J_f(\vec{g}(t))\, J_{\vec{g}}(t) = (1+t, t^2)\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = 2t + 2t^2 + t^2$$

$$= 2t + 3t^2$$

**Def** (riktningsderivata)

Låt $f$ vara en funktion av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\vec{n}$ enhetsvektor och bilda

$$f'_{\vec{n}}(\vec{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}+t\vec{n}) - f(\vec{x})}{t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(\vec{x}+t\vec{n})\right)\Big|_{t=0}$$

Speciellt har vi att $f'_{\vec{e}_1}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})$, $f'_{\vec{e}_2}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial y}$

Sats: Om $f$ är differentierbar i $\vec{x}$ så är $f'_{\vec{n}}(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}$.

Bevis: Kedjeregeln ger att

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{n})\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \frac{d}{dt}(\vec{x} + t\vec{n})\Big|_{t=0} =$$

$$= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}$$

Vi ser att riktningsderivatan är störst om $\vec{n}$ har samma riktning som $\operatorname{grad} f$.

Ex/Övn: Beräkna riktningsderivatan för funktionen $x^2 - y^2 = 1$ i punkten $(\sqrt{2}, 1)$ med riktning $(1,1)$. I vilken riktning växer funktionen snabbast?

Normera: $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad f'_{\vec{n}}(\sqrt{2}, 1) = \operatorname{grad} f(\sqrt{2}, 1) \cdot \vec{n}$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y) \Rightarrow \operatorname{grad} f(\sqrt{2}, 1) = (2\sqrt{2}, -2)$

Så $f'_{\vec{n}}(\sqrt{2}, 1) = (2\sqrt{2}, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}.$

funktionen växer snabbast
i gradientens riktning dvs
i riktning $(2\sqrt{2}, -2)$.

Ex (transformation av differential-
ekvationer)

Betrakta differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$\left( \begin{array}{l} f(x,y) = g(x-y) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right)$$

Låt $T(x,y)=(x-y,y)$ $(=(u,v))$.

Då ger kedjeregeln att om

$\tilde{f}(u,v)=f(x,y)$ så är

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} \tilde{f} \; J_T$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)$$

Så $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ transformeras

till $0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \left( -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$.

Vi får att $\tilde{f}(u,v) = \tilde{g}(u)$ så

$f(x,y) = g(x-y)$ för någon

deriverbar funktion $g$.

För att hitta en bra transformation observerar vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{grad} f \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{grad}\tilde{f} \; \underbrace{J_T \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Vill att den här ska ha en enkel form tex } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.}$$

Vi vill ha $J_T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow J_T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Vi väljer alltså $J_T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

vilket ger $J_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex/Övn: Finn allmänna lösningen till $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(Vi ser att om $f(x,y) = g(x+y)$ så uppfyller den ekvationen)

Ange en matris $J_T$ ger $J_T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

tex $J_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{så}$$

vi tar $T(x,y) = (x+y, -y) = (u,v)$

Ekvationen $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

transformeras till $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0$

så $\tilde{f}(u,v) = \tilde{g}(u)$ dvs

$$f(x,y) = g(x+y).$$