differentierbarhet forts

En funktion $\vec{f}$ av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara differentierbar i punkten $\vec{x}$ om

$$\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \underset{m \times n \text{ matris}}{\underset{\uparrow}{A}}\vec{h} + \vec{R}(\vec{x},\vec{h})|\vec{h}|$$

där $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \vec{R}(\vec{x},\vec{h}) = \vec{0}$

Vi kan bestämma A som tidigare och får om

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

att

$$J_{\vec{f}} = A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m \end{pmatrix}$$

A kallas Jacobimatrisen

Ex/övn: Bestäm $J_{\vec{f}}$ då:

$$\vec{f}(u,v) = (\underbrace{\cos u \cos v}_{f_1}, \underbrace{\cos u \sin v}_{f_2}, \underbrace{\sin u}_{f_3})$$

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\sin v \cos u \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}$$

Ex/Övn: Bestäm $J_{\vec{f}}$ då

$$\vec{f}(t,u,v) = \left(t^2 - uv,\ tuv,\ \frac{uv}{t}\right)$$

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} 2t & -v & -u \\ uv & tv & tu \\ -\frac{uv}{t^2} & \frac{v}{t} & \frac{u}{t} \end{pmatrix}$$

Specialfallet $n=2$, $m=1$

$$f(x+h,y+k) = \boxed{f(x,y) + \operatorname{grad} f(x,y) \cdot (h,k)} + R(x,y,h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

Planet

$$z = f(a,b) + \operatorname{grad} f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$$

kallas tangentplanet till grafen $z=f(x,y)$ i punkten (a,b)

Ex/övn: Bestäm tangentplanet till ytan $z = \underbrace{x^2 y}_{f(x,y)}$ i punkten $(x,y) = (\underset{a}{2}, \underset{b}{3})$.

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy, x^2)$

SVAR: $z = 12x + 4y - 24$

$$z = f(2,3) + \operatorname{grad} f(2,3) \cdot (x-2, y-3)$$

$$z = 12 + (12, 4) \cdot (x-2, y-3) =$$

$$= 12 + 12x - 24 + 4y - 12 = 12x + 4y - 24$$

Ex/övn: Bestäm gradienten till $F(x,y,z) = z - x^2 y$ $f(x,y)$

SVAR: $\operatorname{grad} F(x,y,z) = (-2xy, -x^2, 1)$

$\operatorname{grad} F(2,3,12) = (-12, -4, 1)$

OBS: $F(2,3,12) = 0$

$0 = \operatorname{grad} F(2,3,12) \cdot (x-2, y-3, z-12) =$

$= -12(x-2) - 4(y-3) + 1(z-12)$

$\Rightarrow z = 12(x-2) + 4(y-3) + 12 =$

$= \operatorname{grad} f(2,3) \cdot (x-2, y-3) + 12$

Tangentplanet till $z = f(x,y)$

Ex/övn: Bestäm tangentplanet till ytan $z = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)}$ i punkten $(x,y) = (1,1)$.

$\text{grad} f(x,y) = (2x, 2y)$

Lösn 1: $z = f(1,1) + \text{grad} f(1,1) \cdot (x-1, y-1)$

$= 2 + (2,2) \cdot (x-1, y-1) =$

$= 2 + 2(x-1) + 2(y-1) = 2x + 2y - 2$

Lösn 2: $F(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ $\quad F(1,1,2) = 0$

$\text{grad} F(1,1,2) = (-2,-2,1)$

$0 = (-2,-2,1) \cdot (x-1, y-1, z-2) \Leftrightarrow z = 2x + 2y - 2$

Högre derivator

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{osv.}$$

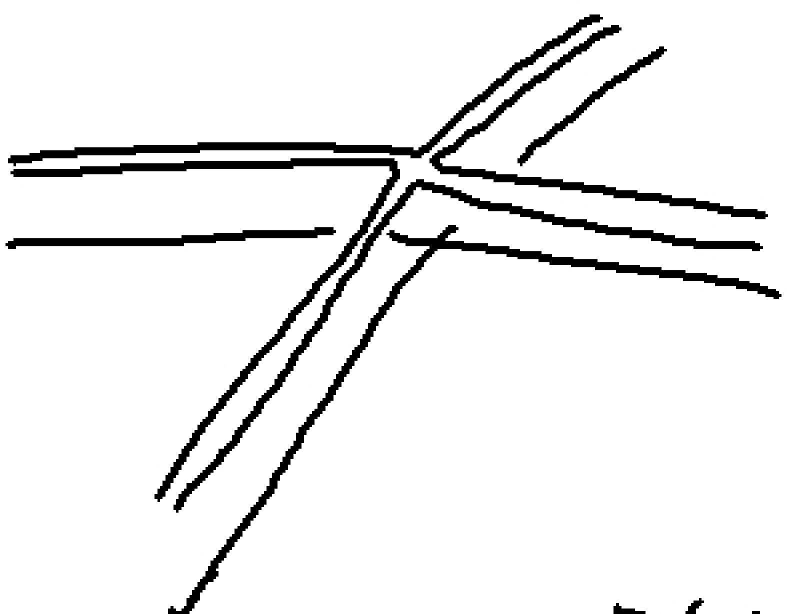
Ex/Övn: Låt $f(x,y) = x^2 y$, bestäm

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ och } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

SVAR: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$

Sats: Om de blandade derivatorna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ är kontinuerliga i en omgivning av en punkt så är de lika i omgivningen.

Ex: Låt $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ el } y = 0 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

pss $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ men f ej differentierbar.

Sats: Om f är differentierbar så är den kontinuerlig.

bevis: $$f(x+h,y+k) = f(x,y) + A\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R(x,y,h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x+h,y+k) = f(x,y)$$

vilket visar att f är kontinuerlig.

Sats: Om alla partiella derivator till en funktion $\vec{f}$ är kontinuerliga i en omgivning av en punkt så är $\vec{f}$ differentierbar i omgivningen.