Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-01-19

Obs: Viktigt få senaste upplagan av Amelia2-boken, info om minsta-kvadrat-metoden saknas i äldre upplagor.

Denna kurs innehåller information viktig för fysik- och statistikkurser vi kommer att gå senare.

Upplägg: Fem moment -> Fem obligatoriska uppgifter på tentamen.
Varje moment bestående av fyra delar: Begreppsuppgift (1p), resonemangsuppgift (1p), grupparbete (4p), kontrollskrivning (4p). För godkänt på moment krävs 8/10p. Möjlighet kommer finnas att komplettera ej avklarade moment (t ex för de som får 7p).

Studienämnd, två personer ur varje lektionsgrupp. Lektionsgrupper: Andreas (1), Dmitri (2). Observera extra övning på fredag, denna är avsedd för de som inte klarade Amelia – repetition av envariabelanalys (viktig för att klara AmeliaII). Fler x-övningar kommer, dock ej enl fast schema utan på olika tider.

M1: Linjära Avbildningar

$$A : V \to W \quad V \; och \; W \; vektorrum$$
$$A\vec{v} = \vec{w}$$

"A är en funktion som tar emot en vektor i V ($\vec{v}$) och ger som svar en vektor i W."

Definition: A är en linjär avbildning om följande villkor är uppfyllda:

1. $A(\vec{v}+\vec{u}) = A\vec{v} + A\vec{u}$
2. $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}$

Exempel:
$$A\vec{v} := k\vec{v} \quad \text{är en linjär avbildning , ty}$$
$$A(\vec{v}+\vec{u}) = k(\vec{v}+\vec{u}) = k\vec{v}+k\vec{u} \quad och$$
$$A(k_1\vec{v}) = k(k_1\vec{v}) = k_1(k\vec{v}) = k_1(A\vec{v}) \quad \text{där } k, k_1 \text{ reella tal.}$$
Så villkoren i definitionen är uppfyllda.

Exempel (bild): Vi kan rita två vektorer u och v, samt summan u+v. Nu använder vi "avbildningen" A = 2 och ritar Au och Av, dvs 2u och 2v (dubbla vektorn blir en dubbelt så lång vektor i samma riktning). Därefter ritar vi 2(u+v) och konstaterar att 2(u+v) = A(u+v), doh. Denna avbildning ("2") innebar ju helt enkelt att vi skalade allting till dubbla storleken.

Exempel (bild): Au = töjning med faktor 2 i y-led. Vi kan säga att vi delar upp u i komposanter och multiplicerar endast y-vektorn (dvs, den lodräta) med 2, och lämnar x-vektorn i fred.
Exempel (bild): Rotation. Vi har en vektor u och roterar den med vinkeln f (fi) och kallar detta Au.
Exempel (bild): Projektion. Vi har en vektor u och projicerar denna på x-axeln. Detta kallar vi Au.
Exempel (bild): Spegling. Det går inte (i allmänhet) att spegla genom rotation, utan det räknas som en separat operation. Vi kan spegla en vektor (gissa vad den heter...) i x-axeln och kalla detta Au.
Exempel (bild): Skjuvning. Vi kan ta en vektor u och flytta den i x-led och kalla det Au. Vid skjuvning "adderar" man, det är därför skiljt från att töja, då man "multiplicerar".
Exempel: $A\vec{v} = \vec{0}$.

Det kan bevisas att alla de ovanstående exemplen utgör linjära avbildningar tack vare de två villkoren (som vi gick igenom tidigare). Left as an exercise to the reader.

Låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara en ON-bas: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \; |\vec{e}_1| = 1, \; |\vec{e}_2| = 1.$
Låt $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ och $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ och låt A vara en linjär avbildning.

$$A\vec{u} = A(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = [villkor\ 1] = A(x\vec{e}_1) + A(y\vec{e}_2) = [villkor\ 2] = xA\vec{e}_1 + yA\vec{e}_2$$

Så avbildningen bestäms helt av dess verkan på $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$. Vi antar ON-bas eftersom det är enkelt att tänka sig, men det är inget krav och det används inte ovan.

Om $A : V \to V$ där V spänns av $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, så kan $A\vec{e}_1$ och $A\vec{e}_2$ också uttryckas i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

$$\text{Låt} \quad A\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \quad och \quad A\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

Då kan vi fortsätta på det vi skrev ovan:

$$xA\vec{e}_1 + yA\vec{e}_2 = x(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) + y(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = (xa_{11} + ya_{12})\vec{e}_1 + (xa_{21} + ya_{22})\vec{e}_2$$

Om vi nu vill uttrycka detta mha en matris, vill vi att den ska se ut så här:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_{11} + ya_{12} \\ xa_{21} + ya_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Observera att i matrisen **A** är första kolonnen precis $A\vec{e}_1$ och den andra $A\vec{e}_2$.
A kallas för *avbildningsmatrisen*.

Övning: Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som tar vektorn v till 5v.

$$A := 5, \quad \vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$$5\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 5\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad Ok!$$

Övning: Bestäm avbildningen för töjningen med faktor 2 i y-led (det vill säga, $\vec{e}_2$ -led).

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Ok!$$

Övning: Bestäm avbildningsmatrisen för rotation i planet, moturs med en vinkel *f*.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos f & -\sin f \\ \sin f & \cos f \end{pmatrix}$$

Kom ihåg: x-led är $\vec{e}_1$ och där ges koordinaten med cosinus (motsatta förhållandet för y-led).

Övning: Bestäm avbildningsmatrisen för vinkelrät projektion på x-axeln.

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Slut för idag / it03_wsv@it.kth.se