Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-02

Datorprogrammet "Graphing Calculator" finns på *http://kmr.nada.kth.se/download*
Användarnamnet är *kmr*, lösenordet *matte*. Programmet ska registreras on-line vid första körningen med användarinformation och licensnummer (som inte står här).

Diagonalisering: Vi vill ha enkla avbildningsmatriser och speciellt diagonala.

Exempel: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *töjning med en faktor* 2 *i* $x-$*led och* 3 *i* $z-$*led.*

Vilket vi lätt kan se eftersom $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}.$

Diagonala matriser har också andra trevliga egenskaper, exempelvis vid transponering och multiplikation.

Exempel: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 5 \end{pmatrix}.$

Att räkna potenser är också enkelt eftersom man bara behöver ta potensen av varje element i diagonalen (att räkna en potens är ju samma sak som att räkna multiplikation).

Att diagonalisera en matris betyder att hitta en koordinattransformation som tar matrisen till en diagonalmatris.

Eftersom en diagonalmatris svarar mot töjningar i olika riktningar måste det finnas riktningar där den ursprungliga matrisen fungerar som en töjning, dvs det finns en vektor $\vec{v}$ så att $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. Vektorn $\vec{v}$ kallas för *egenvektor* och konstanten λ kallas *egenvärde*.

$$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad (A-\lambda E)\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \det(A-\lambda E)=0$$

Vilket ger en polynomekvation som har egenvärdena som rötter.

Exempel/övning: Finn eventuella reella egenvärden till följande matriser:

$$(i)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (iii)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (iv)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(i)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}\lambda_1=-1 \\ \lambda_2=3\end{matrix}$$

$$(ii)\begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (\cos\varphi-\lambda)^2+\sin^2\varphi=0 \quad [\textit{inga reella rötter för alla } \varphi]$$

$$(iii)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=1$$

$$(iv)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}\lambda_1=0 \\ \lambda_2=2\end{matrix}$$

$$\textit{Svar:}\quad (i)\ -1,3 \quad (ii)\ \textit{inga} \quad (iii)\ 1 \quad (iv)\ 0,2$$

Nu vill vi, givet en matris $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och egenvärdena -1 och 3,ta fram egenvektorerna:

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad (A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}$$

$$-1:\quad \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad u=-v$$

Ett exempel på en vektor med egenvärdet -1 *är alltså* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$$3:\quad \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{Bmatrix} 2v-2u=0 \\ 2u-2v=0 \end{Bmatrix} \quad\Rightarrow\quad u=v$$

Ett exempel på en vektor med egenvärdet 3: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Sats: *Om en matris A är symmetrisk (måsta vara kvadratisk) så är egenvektorer som svarar mot olika egenvärden vinkelräta.*

Bevis: *Låt* $\vec{u},\vec{v}$ *vara egenvektorer med egenvärden* λ *respektive* μ, $\mu\neq\lambda$.
Då har vi: $\mu(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot A\vec{v}=A^T\vec{u}\cdot\vec{v}=A\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
$\Leftrightarrow\quad (\mu-\lambda)(\vec{u}\cdot\vec{v})=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad$ *då* $\lambda\neq\mu$.

Sats: *I allmänhet har vi att egenvektorer som svarar mot olika egenvärden är linjärt oberoende.*

Från detta följer:
Sats: *Om A är en* $n\times n-$*matris, som har* n *stycken olika egenvärden, då är A diagonaliserbar.*

Sats (spektralsatsen): *En matris A kan diagonaliseras med hjälp av ett koordinatbyte av ON−typ om och endast om A är symmetrisk.*

Bevis: $C^T AC=D \quad (\textit{diagonal}) \quad\Rightarrow\quad A=CDC^T, \quad A^T=(C^T)^T D^T C^T=CD^T C^T=CDC^T=A.$
Så A är symmetrisk.

Exempel/övning: *Diagonalisera* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=[\textit{räknas ut}]=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+16=0$$

Egenvärdena (rötterna) blir $1,4,4$ *och diagonaliseringen:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Vi får egenvektorerna $(1,1,-1)$ *för* $\lambda=1$ *och* $(1,1,2)$ *samt* $(1,0,1)$ *för* $\lambda=4$.

Slut för idag / it03_wsv@it.kth.se