Föreläsningsanteckningar AmeliaII 2004-02-16

I dag fortsätter vi med kontinuerliga funktioner, egenskaper hos:

Exempel: Vi vill visa att $f(x,y)=\sin(xy)$ är kontinuerlig. Vi vet att det är en funktion $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Lösning: Vi ska visa att funktionen är kontinuerlig i varje punkt i planet, dvs:

$$t\to(x(t),y(t)),\quad t\in[0,1)\quad där\quad \lim_{t\to1^-}(x(t),y(t))=(a,b)\quad gäller\quad \lim_{t\to1^-}f(x(t),y(t))=f(a,b).$$

Vi antar här att $(x(t),y(t))\in D_f\,\backslash\,(a,b)$ för $t\in[0,1)$, dvs att funktionen *f* är definierad för alla tillämpliga värden (för annars går det ju inte att skriva som ovan).

Vi kan flytta in gränsvärdet eftersom sinus är en kontinuerlig funktion i en variabel:

$$\lim_{t\to1^-}\sin(x(t)y(t))=\sin\left(\lim_{t\to1^-}x(t)y(t)\right)=\sin(ab)$$

Vilket skulle visas.

Sats: Alla elementära uttryck är kontinuerliga i sina definitionsområden.

Ex/Övning:

$$Visa\ att\ funktionen\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad är\ kontinuerlig.$$

Enligt satsen ovan är funktionen kontinuerlig utanför origo. Vi vill alltså visa att:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1\,.$$

Lösning:

$$Vi\ kan\ skriva:\quad \lim_{t\to1^-}\frac{\sin(x(t)^2+y(t)^2)}{x(t)^2+y(t)^2}=1$$

$$Där\quad t\to(x(t),y(t))\quad är\ en\ funktion\ sådan\ att\quad \lim_{t\to1^-}(x(t),y(t))=(0,0).$$

$$Vi\ substituerar\ med\quad s=x(t)^2+y(t)^2\quad och\ får:$$

$$\lim_{s\to0^-}\frac{\sin s}{s}=1\quad som\ är\ ett\ känt\ gränsvärde.$$

Sats: Om *f* är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definierad på en kompakt mängd så gäller att:
1. *f* antar ett största och minsta värde.
2. om D_f är sammanhängande så antar *f* alla mellanliggande värden.

Följdsats: Om *f* är en kontinuerlig funktion av typ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ definierad på en kompakt mängd så gäller att:
1. V_f är kompakt (se grupparbete 3).
2. Om D_f är sammanhängande så är V_f sammanhängande (se grupparbete 1).

Som exempel, betrakta funktionen $f(\vec{x})=\dfrac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|}$ där *A* är en linjär avbildning. Vi kan då skriva:

$$f(t\vec{x})=\frac{|A(t\vec{x})|}{|t\vec{x}|}=\frac{|tA\vec{x}|}{|t\vec{x}|}=f(\vec{x})\,.$$

Vi kan därmed betrakta *f* som definierad på enhetssfären. Men enhetssfären är kompakt, så *f* antar ett största värde.

Definition: Låt *A* vara en linjär avbildning $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, då kallar vi uttrycket:

$$\|A\|=\max\frac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|}=\max|A\vec{x}|\quad(|\vec{x}|=1)$$

för A's *norm*. Vi kan säga att normen är den *maximala skillnaden i längd* mellan en vektor som transformerats av matrisen och en otransformerad vektor.

Ex/Övning:

$$Bestäm\ matrisnormen\ då\quad A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\quad är\ spegling\ i\ x-axeln$$
$$respektive\ töjning\ i\ y-led\ med\ en\ faktor\ 2.$$

$$Spegling\ i\ x-axeln:\ \|A\|=1\,,\qquad Töjning\ i\ y-led\ med\ 2:\ \|A\|=2$$

Lösning:

$$a:\ \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix},\quad \left|\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|=\sqrt{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ \|A\|=1.$$

$$b:\ \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix},\quad \left|\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}\right|=\sqrt{x^2+4y^2},\quad \|A\|=\max\frac{\sqrt{x^2+4y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\,.$$

Differentierbara funktioner i en variabel: *Differentierbar* är samma sak som *deriverbar*.

Definition: En funktion är *deriverbar* om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ existerar.

Definition: En funktion är *differentierbar* om den kan skrivas $f(x+h)=f(x)+Ah+R(x,h)h$ där gränsvärdet $\displaystyle\lim_{h\to0}R(x,h)=0$.

I ekvationen för differentierbarhet ovan är A derivatan, eftersom: $\displaystyle\lim_{R(x,h)\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+R(x,h)$, vilket vi får om vi flyttar om lite i ekvationen. Härigenom ser vi att differentierbar och deriverbar är samma sak för funktioner i en variabel.

I flera variabler: En funktion $\vec{f}:D_f\subseteq R^n\to R^m$ är differentierbar i punkten $\vec{x}$ om $(D_f\subseteq omg\ till\ \vec{x})$ och $\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})=\vec{f}(\vec{x})+\boldsymbol{A}\vec{h}+\vec{R}(\vec{x},\vec{h})|\vec{h}|$ där ***A*** är en $m\times n$ -matris som inte beror av $\vec{h}$, och $\vec{R}$ är en funktion sådan att $\displaystyle\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\vec{R}(\vec{x},\vec{h})=\vec{0}$.

Exempel (*n=1*):

$$\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\\vdots\\x_m(t)\end{pmatrix};\quad ger:\ \begin{pmatrix}x_1(t+h)\\\vdots\\x_m(t+h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\\vdots\\x_m(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}h+\begin{pmatrix}R_1(t,h)\\\vdots\\R_m(t,h)\end{pmatrix}\cdot|h|$$

$$eller:\ \begin{pmatrix}x_1(t+h)\\\vdots\\x_m(t+h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(t)+a_1\cdot h+R_1(t,h)\cdot|h|\\\vdots\\x_m(t)+a_m\cdot h+R_m(t,h)\cdot|h|\end{pmatrix}.$$

$$så\quad A=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_1(t)\\\vdots\\x'_m(t)\end{pmatrix}=\vec{f}\,'(t).$$

$$Vilket\ ger:\quad \vec{f}(t+h)=\vec{f}(t)+\vec{f}\,'(t)\cdot h+\vec{R}(t,h)\cdot|h|\,.$$

Exempel (*m=1*):

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(a_1,\ldots,a_n)\begin{pmatrix}h_1\\\vdots\\h_n\end{pmatrix}+R(\vec{x},\vec{h})\cdot|\vec{h}|$$

$$För\ att\ bestämma\quad a_1,\ldots,a_n\quad sätter\ vi\ alla\ h_i=0\ utom\ ett:$$

$$\vec{h}=\begin{pmatrix}h_1\\0\\\vdots\end{pmatrix}:\ f(x_1+h_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)+a_1h_1+R(\vec{x},\vec{h})\cdot|\vec{h}|$$

$$så\ a_1\ är\ derivatan\ av\ f\ då\ vi\ håller\ resten\ av\ variablerna\ fixa,$$
$$partialderivata\ med\ avseende\ på\ x_1\,.$$

Partialderivata:

$$Vi\ skriver\quad a_1=\frac{\delta f}{\delta x_1}(\vec{x})\quad för\ den\ partiella\ derivatan\ av\ f(\vec{x})\ med\ avseende\ på\ x_1$$

$$I\ fallet\ ovan\ blir\quad A=\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(\vec{x}),\ldots,\frac{\delta f}{\delta x_n}(\vec{x})\right).$$

$$A\ kallas\ \text{gradienten}\ till\ f\ och\ betecknas\quad \text{grad}\ f\quad eller\quad \nabla f\,.$$

$$Vi\ har\ alltså:\quad f(\vec{x}+\vec{h})=f(\vec{x})+\text{grad}(f(\vec{x}))\cdot\vec{h}+R(\vec{x},\vec{h})\cdot|\vec{h}|$$

(Det triangelformade tecknet uttalas *nabla*.)

Exempel:

$$Bestäm\quad \frac{\delta f}{\delta x},\frac{\delta f}{\delta y},\frac{\delta f}{\delta x}\quad då\quad f(x,y,z)=x^2\cdot y\cdot z^3$$

Lösning:

$$\frac{\delta f}{\delta x}=2x\cdot y\cdot z^3,\quad \frac{\delta f}{\delta y}=x^2\cdot z^3,\quad \frac{\delta f}{\delta z}=x^3\cdot y\cdot 3z^3$$

Exempel:

$$Beräkna\quad \frac{\delta f}{\delta x}(1,0,-1)\quad då\quad f(x,y,z)=xyz+\sin\left(\frac{yz}{x}\right).$$

Lösning:

$$\frac{\delta f}{\delta x}=yz+\cos\left(\frac{yz}{x}\right)\left(-\frac{yz}{x^2}\right),\quad \frac{\delta f}{\delta x}(1,0,-1)=0+1\cdot0=0$$

Slut för idag // it03_wsv@it.kth.se